

数とは何ぞや

数は誰が作ったの、どこにあるの

一昨日 冗 著

はじめに

図やグラフ(絵)を描きながら"数とはなにか"を学びましょう。数は誰が作ったのでしょうか、どこにあるのでしょうか、どんな役に立つのかな。

数を学ぶことで、地球温暖化、戦争のない世界、天体の運動、宇宙の不可思議さ、など未知の問題を解明できるかな? できるかもね。しかし、地球が人の住めない天体になってしまうのが早いかも知れないね。異常気象(100年に1回しか起こらない現象、1000年に1回しか起こらない現象など)が、最近よく報告されてますね。地球が壊れる前兆かも知れないね、みんな不安に思っているよね。カタストロフィー(破局)はいつきにやってくるという理論もあるよ。

ロシアが大々的に侵略戦争を始めた(2022年2月24日)けど、戦争なんかやってる場合じゃないよね。ロシアの大統領は"核爆弾を使うぞ"と脅しているけど、まともな人間のすることじゃないね。地球の危機がすぐそこまで来ているというのに! 私達には、これを乗り越えるための知恵と行動が必要です。数学がよい解決策を与えてくれるかも知れないよ。みんなで考えよう。

Let's play with numbers!



図0. 動物と野菜のかず

もくじ

第1章 いろいろな数(すう)

§ 1.1 自然数, ゼロ, 整数, 数直線	
狩猟採集, 自然数, ゼロの概念	4
借りる, 物々交換, 負の概念, 同値	5
ゼロ, 負の数, 正の数, 整数, 集合	
大小関係, 数直線, 無限個, 不等号, 不等式	6
反対側に投げる, かけ算, 2倍の距離の所へ投げろ	
絶対値, 距離, a の n 乗, 式の計算公式1	7
奇数, 偶数, 式の計算公式2, 自然数の和, 奇数の和	
閉じている, 閉じていない	8
演習問題 1.1	9
§ 1.2 有理数, 有限小数, 循環小数	
分数, 小数	9
分度器, 有理数, 有限小数, 循環小数	10
閉区間, 开区間, 半开区間, 無限区間, 無限大	11
式の変形	
演習問題 1.2, 数列	12
§ 1.3 三平方の定理, 無理数, 実数	
正方形の対角線の長さ, 正三角形の高さ, 円の周の長さ, 三角じょうぎ	13
三平方の定理, ピタゴラスの定理	14
ルート a , 平方根, 無理数, 無理数を含む式の計算公式	15
分母の有理化, 極限の概念, 微積分, 円周率 π (パイ)	
円の面積, 円の周の長さ	16
ネピアの数 e (イー), 実数, 数の集合	17
数直線, 点は大きさを持たない, 直線は太さなし	
演習問題 1.3	18
第1章 問題の答	19
補足(ほそく): 数列の無限和	
一般項, 発散する, 自然数の逆数の和, 収束,	20
無限和の収束, 等差数列, 等比数列	21
第2章 整数の性質, 方程式の解	
§ 2.1 素数, 整数の性質	
倍数, 約数, 素数, 自明な約数, ふたご素数	22
因数, 素因数, 素因数分解	22
公約数, 最大公約数, 公倍数, 最小公倍数	23
演習問題 2.1	24
§ 2.2 数学の命題について(高校で習う範囲)	
命題, 真, 偽, 仮定, 結論, 同値, 否定	24

「かつ」, 「または」の否定, 逆, 対偶, 裏, 反例, 背理法	25
たがいに素	26
演習問題 2.2	26
§ 2.3 素数の性質 (素数は素敵な数)	
合成数, 平方数, 2 のべき	72
素数は無限個存在, 素数の分布, 素数の逆数の和	28
演習問題 2.3	29
§ 2.4 方程式の解	
1. 因数分解	
因数分解, 因数分解公式 1, 複号同順	29
因数分解公式 2,	30
式の割り算, 因数定理	31
因数分解公式 3	32
2. 1 次方程式, 連立 1 次方程式	
座標平面, 直線 (1 次関数), 放物線 (2 次関数), 双曲線 グラフ, 1 次方程式, 1 次方程式の解	32
連立 1 次方程式, 連立 1 次方程式の解, 方程式を解く, 加減法, 代入法	33
3. 2 次方程式, 高次方程式	
解の公式, 判別式, 重解, 実数解をもたない, 解の公式その 2	34
新しい数の誕生, 虚数単位, 虚数, 複素数, 実数部 虚数部, 純虚数, 複素変数, 複素数の演算	35
複素数平面, ベクトル, 絶対値, 極形式 偏角, 三角関数	36
高次方程式, 単位円	37
代数学の基本定理, 根号, 累乗根, アーベルとガロアの定理	38
演習問題 2.4, 共役 (きょうやく) 複素数	39
第 2 章 問題の答	39
参考図書, あとがき	41

第1章 いろいろな数（すう）

§ 1.1 自然数，ゼロ，整数

二万年前の日本は、**狩猟採集**の時代だったでしょうね。人々は獣（熊，イノシシ，鹿，ウサギなど）を狩り，野の野菜（わらび，ゼンマイ，ミツバ，セリ，タラの芽など）をとり，日々の糧（かて）を得ていたことでしょう。食べることを楽しんでいたかもしれませんね。生きる目的イコール食べることだったでしょうね。

狩猟には，弓矢や石おのを使ったでしょう。矢の先には毒を塗っていたかもしれませんね。一日の狩りで使う矢の数は何本位だったでしょう。また，一年間に使う弓や石おのはどのくらいの数（かず）だったでしょう。現代人の我々にはなかなか想像できないですね。

しかしながら，数（すう）の概念はしっかり持っていたことでしょう。一家族でひと月（満月から次の満月の間）に必要な獲物の数や野菜の量などはどのくらいか，経験で知っていたことでしょう。また，獣の肉などは乾燥させて保存していたでしょう。食料の保存量を見ながら狩りや採集をしていたことが想像できます。すなわち，我々が今使っている

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …, 100, 101, 103, …

なる**自然数**は，当然わかって（使って）いたでしょう。

台風や悪天候などで狩猟採集が何日もできなかつたときは，保存食料がなくなってしまうこともあったでしょうね。食べるものが無いというのは，大事件ですよ。食料が何もないという状況や狩りで獲物がとれなかつたという経験から，**ゼロの概念**も認識していたでしょうね。

【例1】 (1) 保存してあった，最後の2羽の野ウサギの乾燥肉を食べてしまったという状況は，残りは無しということなので，現代流に書けば

$$2 - 2 = 0$$

ということですよ。

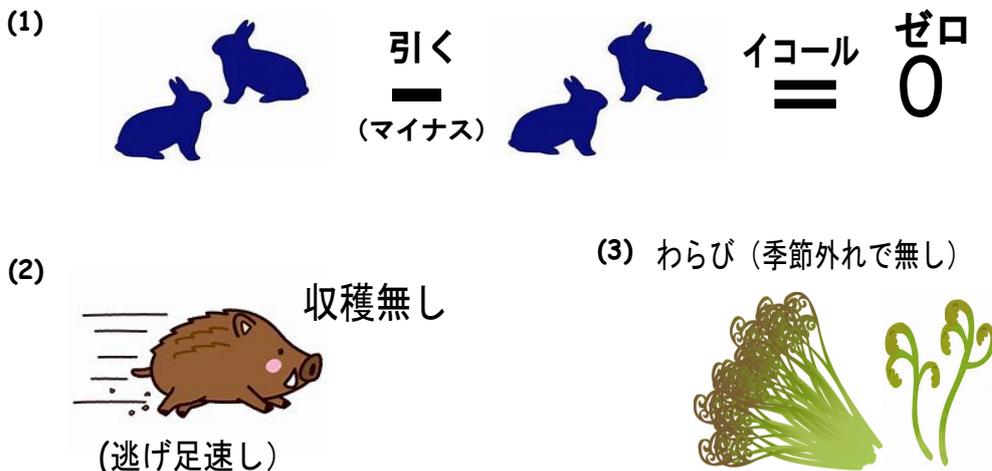


図1. 食料

(2) ある日，イノシシ狩（が）りに出かけたが一匹も獲（と）れなかつたときなどは，収穫無し（ゼロ）ということのがっかりしたでしょうね。家族もがっかりだよ（ゼロの概念の共有）。

(3) 近くの山にわらびを採（と）りに行ったが，もうわらびの季節は終わっていて収穫ができなかつた。収穫無し（ゼロ）で残念だったでしょうが，野の野菜には旬（しゅん）があるということを学んだでしょうね。



さて、必要な食料が無くなってしまったときは、食料を沢山保存している他の家族から

- ① 借りる または ② 物々交換する

などが考えられます。

借りるということは、いずれ返さなければならないという義務が生じるので、**負の概念**ですね。野ウサギを2羽借りたときは、 -2 (マイナス2) という数を認識していたことと思います。5羽借りれば、 -5 ですね。そして、自分がたくさん野ウサギを獲ったときは、借りたものと同量のものを返さなければなりませんね。

物々交換は、例えば、野ウサギ1羽に対してタケノコ10本というように、二種類のものが同じ価値をもつと決められているときの交換方法です。借りるという概念とは異なり、**同値**(同等 or **イコール**) という概念でしょうね。自分の欲しいものを補充するという点で、非常に便利なやり方ですね。

【例2】 山間に住んでいる数家族からなるある集落では、物々交換のルールが次のように決められていたとします：(記号 \Leftrightarrow は同等を表します)

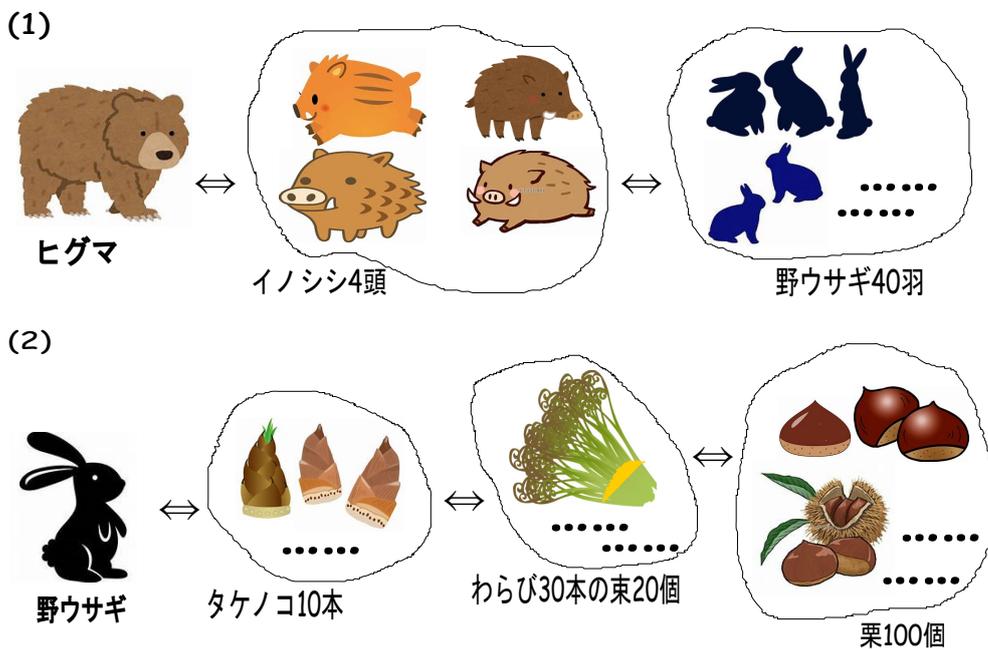


図2. 物々交換 (等価量)

すなわち、

(1) 動物に対して： 【ヒグマ1頭】 \Leftrightarrow 【イノシシ4頭】 \Leftrightarrow 【野ウサギ40羽】

(2) 野ウサギと野菜に対して：

【野ウサギ1羽】 \Leftrightarrow 【タケノコ10本】 \Leftrightarrow 【わらび30本の束20個】 \Leftrightarrow 【栗100個】

(問題 A) Aさんは、Bさんから野ウサギ2羽を借りました。借りを返すとき、同じものの他に物々交換でもいいことになっています。Aさんは、タケノコとわらびはいつでも沢山手に入り、栗は手に入らないと言っています。Bさんに借りを返す方法を全部示して下さい。

解答) 次の6つの借りを返す方法が考えられます。

- 1) 野ウサギ2羽,
- 2) 野ウサギ1羽とタケノコ10本,
- 3) " とわらび30本の束を20個,
- 4) タケノコ20本,
- 5) わらび30本の束を40個,

6) タケノコ 10 本とわらび 30 本の束を 20 個。

(問題 B) 上の問題と同様に物々交換は可能とします。Cさんは、Dさんからイノシシ 1 頭を借りました。Dさんに借りを返すとき、野ウサギで返すには野ウサギ何羽必要ですか。また、栗で返すとき栗は何個必要ですか。

解答) イノシシ 4 頭に対して野ウサギ 40 羽が対応しているの、イノシシ 1 頭に対して野ウサギ 10 羽です。

野ウサギ 1 羽に対して、栗 100 個だから、野ウサギ 10 羽 (イノシシ 1 頭) に対しては栗 1000 個 (100 の 10 倍; かけ算知らなくても数えられるよね) です。♡

自然数は、もののかずをかぞえることから、人間がそれらを発見したと考えていいですね。また、日々の生活の中で、**ゼロ**と自然数にマイナスの符号 $-$ がついた**負の数**も発見しましたね。自然数は**正 (せい) の数**と呼ばれています。

自然数とゼロと負の数をひっくるめて**整数**と呼びます。現在では、数の集まり (**集合**という) を表すのに次のような記号を使っています。

自然数 (Natural number): $N = \{ 1, 2, 3, \dots, 100, 101, \dots \}$

整数 (Zahl ドイツ語): $Z = \{ \dots, -101, -100, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 100, 101, \dots \}$

数には**大小関係**があります。2 より 5 の方が大きいし、 -7 より -4 の方が大きいです。整数は次の**数直線**上に表すことで性質などがよくわかります。

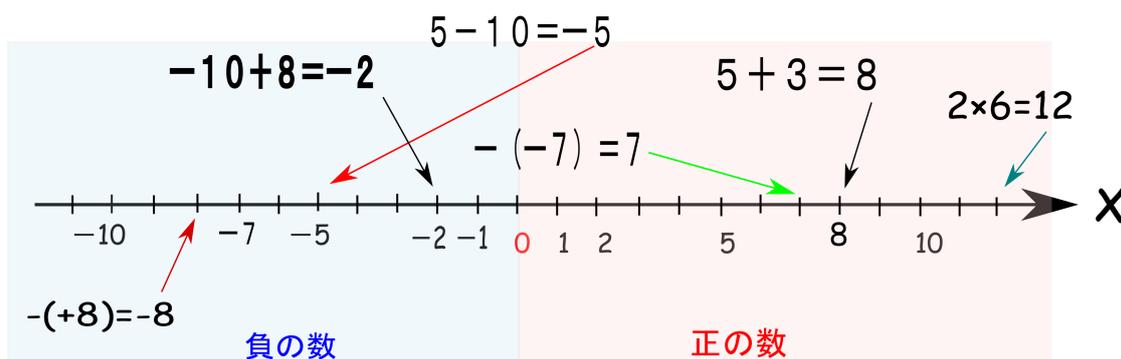


図3. 数直線

数直線上にはゼロ 0 を中心にして右の方に自然数が等間隔にならび、左の方に負の数も等間隔に並びます (短いたて線で数の位置を示している。隣りあった 2 本のたて線間の距離は、全て同じです)。右にいくほど数は大きくなり、左にいくほど数は小さくなります。整数は**無限個**ありますよ。数直線も無限の長さです。

【例 3】 (1) 2 数の大小関係を表すのに**不等号**を使います。

$2 < 5$: 2 より 5 の方が大きい。

$-7 < -4$: -7 は -4 より小さい。

$-(+8) = -8$: 8 に符号 $-$ を付けた数は -8 に等しい。

また、2 数 a, b に対して、**不等式** $a \leq b$ は、 $a < b$ または $a = b$ を表します。同様に、2 数 p, q に対して、不等式 $p \geq q$ は、 $p > q$ または $p = q$ を表します。

(2) 数は符号をいくつかつけて表現されることがあります。それらの意味を考えましょう。

$-(+8) = -8$: 1番左の $-$ の意味は、数直線上の $+8$ をゼロ 0 を中心にして、**反対側に投げる** (-8 の所へ) と考えてよい。1番左が $+$ のときは、何もしません。

$-(-7) = 7$: 数直線上の -7 を、 0 を中心にして反対側に投げるので、 7 になる。

$(-2) \times (+5) = (-2)(+5) = -(2 \times 5) = -10$: 数直線上の 5 を 2 倍して反対側に投げる。
すなわち、 10 を反対側に投げる。

【注意】 2数 a, b に対して、 ab および $a \cdot b$ は**かけ算 (積)** を表します : $ab = a \times b = a \cdot b$.

$2a$ とは、数直線上で、数 a を 0 から a の **2 倍の距離の所へ投げろ** という意味です。

(例) $2 \cdot 70 = 140$, $2(-5) = -10$.

$(-3)(-4) = 12$: 数直線上の -4 を 3 倍して反対側に投げる。すなわち、
 -12 を反対側に投げる。

$(-2)(-3)(+5) = 30$: -15 を 2 倍して反対側に投げればよい。

(計算例) $(-7)(+4)(-8) = 224$, $-(-2)(-3)(-4)(-5) = -120$: ... マイナスが偶数個だと、
答はプラス、奇数個だと答えはマイナスです。

(3) たし算の $5 + 3$ とは、数直線上の「 5 から 3 つ右へ進め」という意味です。したがって 8 。
ひき算の $5 - 10$ とは、数直線上の「 5 から 10 だけ左へ行け」という意味です。したがって -5 。
ひき算の $-3 - 9$ とは、数直線上の「 -3 から左へ 9 行け」という意味です。したがって、 -12 。

$\cdot -10 + 8 = -2$ の意味は、数直線上の「 -10 から右へ 8 進むと、 -2 の位置」に来ると言う意味です。
実際の計算は、絶対値を使って、大きい数から小さい数を引き、絶対値の大きい方の符号をつければいいですね。すなわち、 $-10 + 8 = -(10 - 8) = -2$ という感じです。

(計算例) $-231 + 250 = 250 - 231 = 19$, $-45 + 22 = -(45 - 22) = -23$,
 $-12 + 5 - 7 = -19 + 5 = -(19 - 5) = -14$,
 $-5 + 23 - 14 + 35 - 31 = -(5 + 14 + 31) + 23 + 35 = -50 + 58 = 8$. ♥

【定義 1】 数 a の絶対値とは、数直線上で 0 から a までの**距離**を言います。例えば -45 の絶対値
は 45 , -2 の絶対値は 2 , 23 の絶対値は 23 , 0 の絶対値は 0 です。 ★

ここで、式の計算をするときの公式などをあげておきましょう。

【定義 2】 数 a を n 回かけたものを a^n と書き、 **a の n 乗** と呼ぶ。すなわち

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ 個の } a \text{ の積})$$

★

(例) 数 a, b, c に対して、次のような式がなりたつ。

$$a^2 = a \times a \quad (a \text{ の } 2 \text{ 乗}), \quad (ab)^3 = (ab) \times (ab) \times (ab) = a^3 b^3 \quad ((ab) \text{ の } 3 \text{ 乗}),$$

$$c^5 = c \times c \times c \times c \times c. \quad (c \text{ の } 5 \text{ 乗}).$$

【式の計算公式 1】

$$(1) (a + b) \times c = a \times c + b \times c \quad \Leftrightarrow \quad (a + b)c = ac + bc,$$

$$(2) (a - b) \times c = a \times c - b \times c \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)c = ac - bc,$$

$$(3) a(b + c) = ab + ac, \quad a(b - c) = ab - ac,$$

$$(4) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(5) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$(6) (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

証明) (4) の第 1 式と (5) の証明をします。他は省略 (読者の皆さんやってみてください)。

$$(4) \quad (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

($ab = ba$ に注意, 次式も同様)

$$(5) (a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2. \quad \blacksquare$$

【例4】次式を計算して簡単にせよ。

- (1) $-5 - (6 - 12)$ (2) $6 \times (-2) - 3 \times (-4)$ (3) $(-5)^3 - 6 \times (-4)$ (4) $(-2^2) \times (-3)^3$
 (5) $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ (自然数の和) (6) $1 + 3 + 5 + \dots + 99$ (奇数の和)
 (7) 52×48 (8) 27^2 (9) 111^2

解答) (1) 与式 $= -5 - (-6) = -5 + 6 = 1$ (2) 与式 $= -12 + 12 = 0$

(3) 与式 $= (-5) \times (-5) \times (-5) - 6 \times (-4) = -125 + 24 = -101$

(4) 与式 $= -(2 \times 2) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -4 \cdot (-27) = 108$

(5) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$ とおく。逆順の和と S をたすと

$$+ \quad \begin{array}{r} S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 100 \times 101,$$

$$\therefore S = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050.$$

(6) 与式 $= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 - (2 + 4 + 6 + \dots + 100) = 5050 - 2(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$

$$= 5050 - 2 \times \frac{50 \times 51}{2} = 5050 - 2550 = 2500 = 50^2.$$

(1 から 50 までの和は, (5) と同じように計算した)

(7) 与式 $= (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496.$

(8) 与式 $= (30 - 3)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 900 - 180 + 9 = 729.$

(9) 与式 $= (100 + 11)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 11 + 11^2 = 10000 + 2200 + 121 = 12321. \quad \heartsuit$

【式の計算公式2】

n 番目の自然数を n とおくと, n 番目の偶数は $2n$, n 番目の奇数は $2n - 1$ である。次式がなりたつ。

$$(1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \text{ 個の自然数の和}) \quad (1.1)$$

$$(2) 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad (n \text{ 個の偶数の和}) \quad (1.2)$$

$$(3) 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (n \text{ 個の奇数の和}) \quad (1.3)$$

証明) は読者にまかせます。 ■

人間が, 自然数を含む整数まで数を発見したとき, 数に対して新しい性質をも見つけたと思います。自然数にはなく, 整数にはあるというちょっと重要な特徴はどんなものでしょうか? ちょっと考えてみましょう。

自然数どうしのたし算は, 例えば, $5 + 7 = 12$ のように, 結果は自然数に属します。しかし, ひき算では, $5 - 7 = -2$ なので, 結果は自然数に属しません。このように, ある演算の結果がその数の集合に属するとき, 集合はその演算に対して閉じていると言います。結果がその集合に属さないとき, その演算に対して閉じていないと言います。

自然数は, たし算とかけ算に対して閉じているが, ひき算に対しては閉じていません。一方, 整数はたし算, ひき算, かけ算に対して閉じています。したがって, 整数は新しい性質を獲得したと考えていいですね。

【演習問題 1. 1】

問 1. 例 2 で示した物々交換を利用したとき、

- (1) 借りが栗 50 個のとき、2 種類以内の物で借りを返すにはどんな方法があるか答えよ。
 (2) 借りがタケノコ 20 本のとき、2 種類の野菜で借りを返すにはどんな方法があるか答えよ。
 (注意) 物々交換の個々の物は半分に切ったり、3 つ以上の部分に切ったりしないものとする。

問 2. 次式を計算して簡単にせよ。

- (1) $(+6) - (+8) + (-9) - (-3)$ (2) $3 - 9 + 11 - 4 - 5$ (3) $(-5) \cdot (-2)^2 - (-4) \cdot (-3^2)$
 (4) $(-8 + 4^2) \times (-3)$ (5) $105 \cdot 95 - 36 \cdot 44$ (6) 992^2
 (7) $21 + 23 + 25 + \dots + 37 + 39$ (連続した奇数 10 個の和)
 (8) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots - 48 + 49 - 50$ (+ の数と - の数が 50 個交互に並んでいる)

§ 1.2 有理数, 有限小数, 循環小数

さて、 $\frac{1}{2}$ とか $\frac{1}{3}$ とか $\frac{7}{10}$ などという数はどんな場面 (所) で出てくるでしょう。我々の生活のいろいろな場面で、私達は分数と出会っていると思いますよ。身近な例で考えてみましょう。

【例 5】 (1) 一本のようかんを二人で分けて食べる時、正確に半分に切らないと、どちらかが大きくなったりして、奪い合いのけんかになりますよね。あなたならどうやって半分に切りますか。一本のようかんの大きさを 1 と考えたとき、半分は 2 分の 1 ($\frac{1}{2} = 0.5$) としていいですね。また、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ も自明のことと考えられますね。

一本のようかんを 3 人で分けて食べる時は、正確に 3 等分しなければなりません。あなたならどうやって切りますか。3 等分したものの 1 つは $\frac{1}{3} = 0.333\dots$ です。 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ であることも明らかですね。これらの $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ などの新しい数は**分数**と呼ばれます。また、分数を割り算して表した、0.5, 0.333...などは**小数**と呼ばれます。

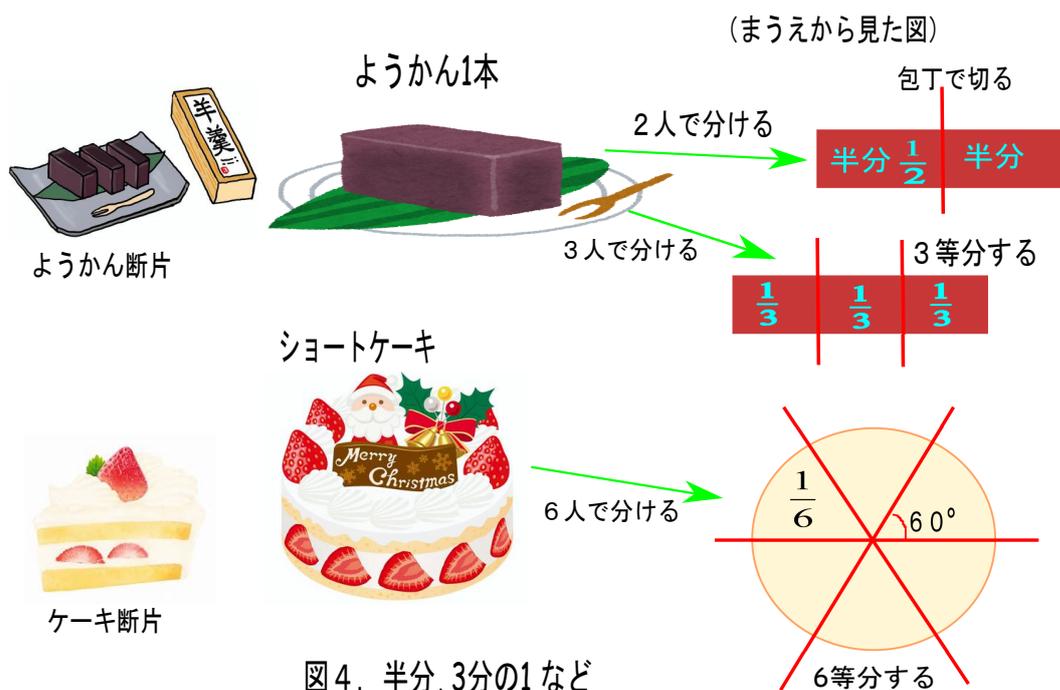


図 4. 半分, 3分の1 など

(2) 円柱状のショートケーキを6等分するとき、あなたならどうやって切りますか。図のように60°で交差している3本の直線にそって切ればいいですね。60°はどうやって作りますか。

分度器を使いますか？ 分度器がないときはどうします？ 6つに切った1つの断片は、もとのケーキの $\frac{1}{6} = 0.1666\dots$ としていいですね。そして $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ ですね。

さて、5人で分けて食べるときは、5等分しなければなりません。あなたはどのように切りますか？ 分度器がないときはどうします？ ♡

分数は我々の生活（空間）の中に、確かに存在してますね。ある物の元の大きさとか量を1と考えたとき、その半分は $\frac{1}{2}$ ，10個に等分すればその1つは $\frac{1}{10}$ としていいですね。 $\frac{1}{10}$ を3つ集めれば $\frac{3}{10}$ ，11個集めれば $\frac{11}{10}$ です。このように、分数は無限に作ることができます。ゼロ0の近くのいくつかの分数を、ふたたび数直線上に表してみます(図5)。

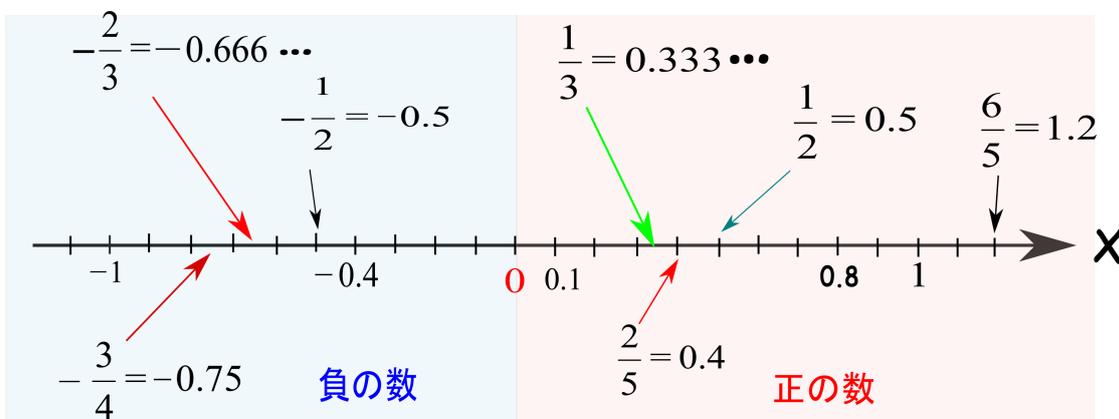


図5. 有理数

【定義3】 n, m は整数で、 $m \neq 0$ とする。 $\frac{n}{m}$ と表される数を**有理数**と呼ぶ。有理数は割り算して小数点つき的小数で表すこともある。有理数の集合は Q で表す：

有理数 (Quotient) $Q = \left\{ \frac{n}{m} \text{ の形の数, ただし, } n, m \text{ は整数で } m \neq 0 \right\}$ ★

有理数は、整数を含んでいることは明らかです。なぜならば、 $m = 1$ のときは、 Q は整数そのものだからです。分数を小数で表現したとき、**有限桁(ケタ)**でおわってしまう**有限小数**，または無限桁の**循環小数**になる、という事実は知っていることと思います。

【例6】 (1) 有限小数の例：

$$\frac{5}{4} = 1.25, \quad \frac{41}{16} = 2.5625, \quad -\frac{7}{8} = -0.875.$$

(2) 循環小数の例 (循環する部分の最初と最後の数の上にドット(点)をつけて表す)：

$$\frac{1}{6} = 0.166666\dots = 0.1\dot{6}, \quad (\text{循環する部分が6のみなので, 6だけにドットを付ける})$$

$$\frac{21}{55} = 0.38181818\dots = 0.3\dot{8}1, \quad -\frac{134}{333} = -0.402402402\dots = -0.4\dot{0}2, \quad \frac{25}{7} = 3.5\dot{7}1428.$$

無限桁の小数が全て循環小数になってしまうのはなぜでしょうか？ ♡

【例7】有理数は0と1の間に無限個存在する。

証明) 0と1のまん中の数は $\frac{1}{2}$, 0と $\frac{1}{2}$ のまん中の数は $\frac{1}{4}$, これと0のまん中の数は $\frac{1}{8}$, ... という具合に無限個の有理数:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

を作ることができます。 ■

【定義4】数直線上で2数 a, b ($a < b$) の間の区間で、両端 a, b を含む区間を $[a, b]$

で表し、閉区間と呼ぶ。両端 a, b を含まない区間を (a, b) で表し、開区間と呼ぶ。 ★

(例) $[0, 1], [-5, 12], \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$ などは閉区間, $(-2, 0), \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$ などは開区間。

・ $a \leq x < b$ を表す x が存在する区間は $[a, b)$ とかき、半開区間と呼ぶ。 $(a, b]$ も $a < x \leq b$ を意味する半開区間。

・ $a \leq x$ をみたす x が存在する区間は $[a, \infty)$ とかく。 $-\infty < x < \infty$ をみたす x が存在する区間は $(-\infty, \infty)$ とかく。これらは、無限区間と呼ばれます。 ∞ は無限大と読んで下さい。

【定理1】 a, b は、 $a < b$ をみたす任意の有理数とする。このとき、閉区間 $[a, b]$ には無限個の有理数が存在する。

証明) 証明は例7と同様です。 ■

整数は数直線上にとびとびに存在し、無限個あります。有理数はどんな小さな区間の中にも無限個存在します。ここが決定的な違いですね。さらに、同じ無限個と言っても、無限の濃度が違いますね。有理数の方が濃いですね。

また、有理数は加法・減法・積・除算に対して閉じています。したがって、数が有理数まで拡張されたとき、整数にはない新しい性質が付加されています。

【例8】(1) 分数 $\frac{5}{16}, \frac{15}{11}$ を小数で表せ。

(2) 循環小数 $1.\dot{2}1, 0.2\dot{4}0\dot{2}$ を分数で表せ。

(3) 次式を計算して簡単にせよ。

$$(a) \frac{3}{5} \div \left(-\frac{3}{10}\right) + \frac{4}{7} \quad (b) (-2)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) \div \frac{9}{8} \quad (c) -(-2)^3 \times \frac{1}{9} - \frac{5}{7} \div \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

解答) (1) 下の図6のようになります。

$\begin{array}{r} 0.3125 \\ 16 \overline{) 50} \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{32} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$ <p>(答) $\frac{5}{16} = 0.3125$</p>	$\begin{array}{r} 1.3636 \dots \\ 11 \overline{) 15} \\ \underline{11} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 70 \\ \underline{66} \\ 40 \dots \end{array}$ <p>(答) $\frac{15}{11} = 1.\dot{3}\dot{6}$</p>
--	--

図6. 割り算, 循環小数

(2) $a = 1.212121 \dots \dots$ ① とおくと, $100a = 121.212121 \dots \dots$ ②.

②-① を計算すると $99a = 120$, $\therefore a = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$. (答)

$x = 0.2402402 \dots$ とおく.

$10x = 2.402402402 \dots \dots$ ③, $10000x = 2402.402402 \dots \dots$ ④

より, ④-③ を計算すると, $9990x = 2400 \therefore x = \frac{2400}{9990} = \frac{80}{333}$ (答)

(3) (a) 与式 $= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{10}{3}\right) + \frac{4}{7} = -2 + \frac{4}{7} = -\frac{10}{7}$.

(b) 与式 $= (-2) \times (-2) + \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{8}{9} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

(c) 与式 $= 8 \times \frac{1}{9} - \frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9} - \frac{20}{63} = \frac{56 - 20}{63} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7}$. ♥

【注意】 === 式の変形 ===

1. $A = B$ のとき, 次のような変形はすべて正しい:

$A \pm C = B \pm C$ (両辺に同じ数をたしても, 両辺から同じ数を引いてもよい)

$kA = kB$ (両辺に同じ数をかけてよい)

$\frac{A}{k} = \frac{B}{k}$ (両辺を同じ数で割ってもよい. $k \neq 0$) (C とか k は式でもいいんですよ)

2. $\frac{A}{B} = \frac{kA}{kB} = \frac{\frac{A}{t}}{\frac{B}{t}}$ (分母と分子に同じ数をかけても, 同じ数で割ってもよい. $k \neq 0, t \neq 0$)

(k, t は, 式でもいいんですよ)

3. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. (1.4)

なぜならば,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \times bd}{\frac{c}{d} \times bd} && (bd \text{ を分母と分子にかける}) \\ &= \frac{ad}{cb} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

【演習問題 1. 2】

問 1. (1) 次式を計算して簡単にせよ。

(a) $24 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) + 12 \div (-3)$ (b) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 \div \left(-\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

(2) (i) $a = -6$ のとき, $a^2 + 4a - 8$ の値を求めよ。

(ii) $b = \frac{2}{5}$ のとき, $3(2b - 1) - (b - 3)$ の値を求めよ。

(3) 次の数列は, ある規則にしたがって規則的に並んでいる。この数列の 10 番目の数を求めよ。

(a) 2, 5, 8, 11, 14, ... (b) 4, -1, -6, -11, -16, ...

問 2. 数列 1, 2, 2², 2³, 2⁴, 2⁵, ... について, 次の問に答えよ。

(1) この数列の 20 番目の数を示せ。

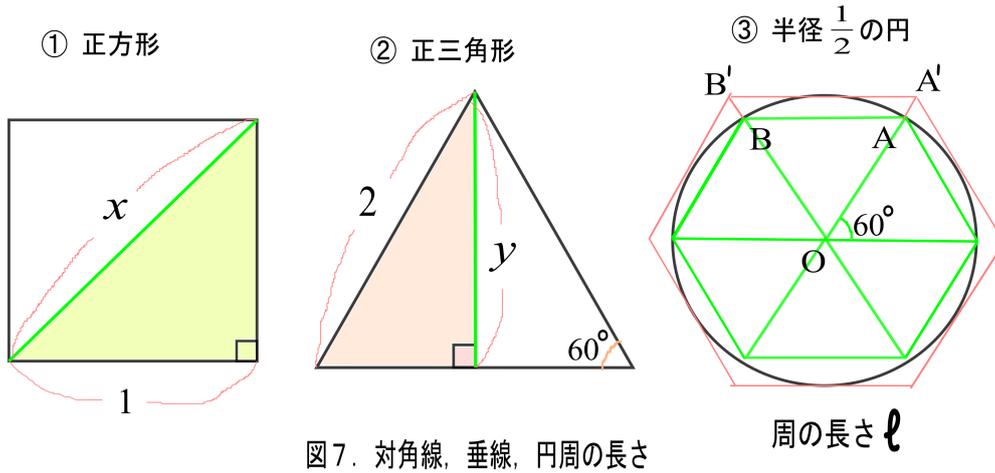
(2) この数列の最初の 20 個の和を求めよ。

§ 1.3 三平方の定理, 無理数, 実数

有理数以外の数はないのでしょうか？ 例えば, 循環小数にならない無限桁の小数はあるでしょうか？ もしかしたら, それは有理数ではありませんね。でも, どうやって見つけますかね (やさしくないよね)。

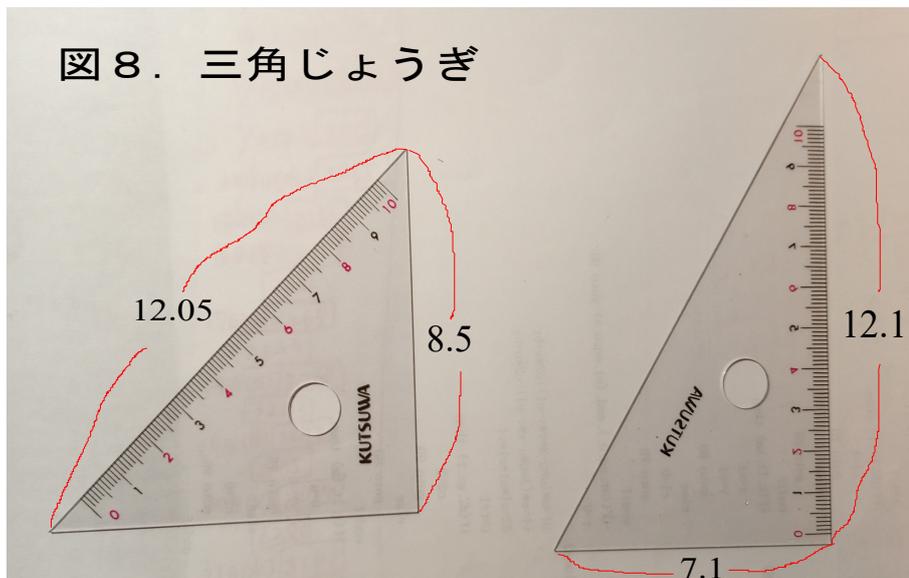
歴史的には, ギリシャ時代 (紀元前 500 年ころ) に, 有理数ではない数が発見されたようです。歴史に興味のある方はいろいろ調べてみると面白いかもね。

我々がよく目にする 正方形, 正三角形, 円 (下の図 7) について, 辺の長さなどを考えてみましょう。



- (1) 一辺の長さ 1 の正方形の対角線の長さを x としたとき, この値は有理数でしょうか？
- (2) 一辺の長さ 2 の正三角形の頂点から下辺に下した垂線の長さを y としたとき, この値は有理数でしょうか？
- (3) 直径 1 の円の周の長さ l は, 有理数でしょうか？

上図 ①, ② の色をつけた三角形は, よく使っている三角じょうぎと相似形ですね。私のもっている三角じょうぎで長さをはかってみました (単位は cm, 下の図 8)。



図の中に書き入れた長さは正確じゃありませんよね。じょうぎで測(はか)って、私の目で確認した長さです。また、三角じょうぎも正確に作られていないかも知れないし、角(かど)がこすれて短くなっているかも知れませんね。しかし、図の中の数値が正しいと仮定すると、 x と y の値は次のように比例式で求めることができます。

$$8.5 : 12.05 = 1 : x \quad \therefore x = \frac{12.05}{8.5} = 1.41764\dots$$

$$7.1 : 12.1 = 1 : y \quad \therefore y = \frac{12.1}{7.1} = 1.704225\dots$$

こんな計算で、 x は1.4に近い値、 y は1.7に近い値ということはわかりますが、有理数か否かは判断できません。

③の円の周の長さを測るのは簡単じゃないよね。自由に曲げることのできる細いハリガネがあれば、直径1の円を作った後で、引き延ばして長さを測ることができます。しかし、近似値でしかありませんよね。

図7. で、円の内側で円に接している正六角形の一辺の長さ AB は $\frac{1}{2}$ なので、この正六角形の周の長さは3です。また、外側で円に接している正六角形の一辺の長さ $A'B'$ は、あとで出てくる三平方の定理より、 $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350\dots$ となるのがわかるので、円の周の長さ l は不等式

$$3 < l < \frac{6}{\sqrt{3}} = 3.46410\dots \quad (1.5)$$

を満たすことがわかります。しかし l が有理数か否かはやっぱりわかりません。

【注意】 $\sqrt{3}$ は”ルート3”と読みます。2乗して3になる正の数を意味します。すなわち、 $(\sqrt{3})^2 = 3$ です。この数値は無限小数の様です。無限小数にならない簡単な例としては、 $\sqrt{4} = 2$ 、 $\sqrt{9} = 3$ などがあります。

図7. の x , y が正確にわかるような1つの基準(or 定理)が欲しいですね。基本図形の一辺の長さなどが測れるといいですね。これに答える強力な結果が、2500年位前のギリシャのピタゴラス学派の人たちによって得られています(すごいよね!)

【定理2】(三平方の定理 or ピタゴラスの定理) 直角三角形の直角をはさむ2辺を a , b , 斜辺を c としたとき、

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1.6)$$

がなりたつ。(図9. 参照)

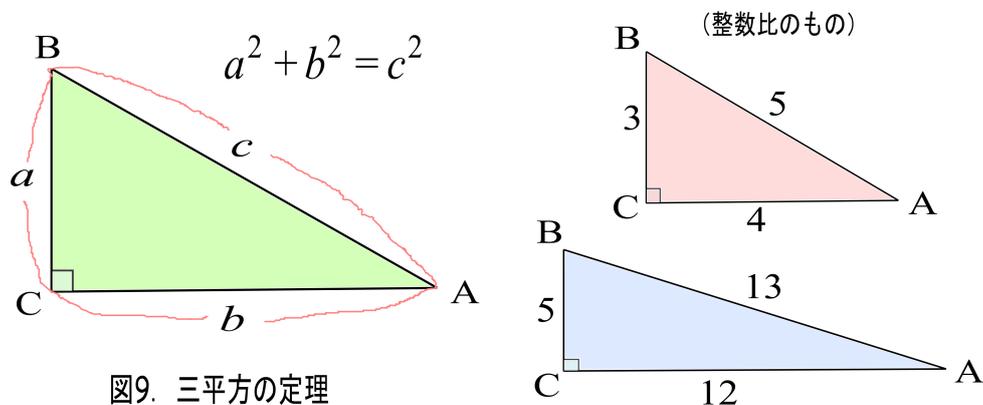


図9. 三平方の定理

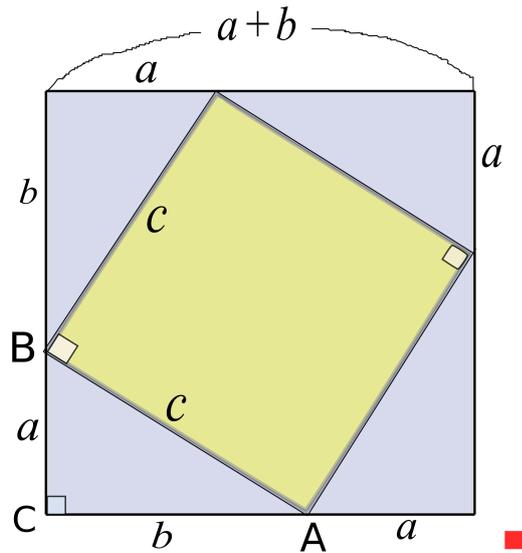
証明) 一辺の長さが $a+b$ の正方形の内部を, $\triangle ABC$ と合同な三角形 3つと, 一辺が c の正方形でうめる。

この正方形の面積について, 次の式がなりたつ。

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$



この定理で, 図7の x, y は求まりそうですね。① に定理を適用して,

$$1^2 + 1^2 = x^2, \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \therefore x = \sqrt{2}. \quad (\text{この数は後で説明する})$$

同様に, 図7の ② より,

$$y^2 + 1^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 3 \quad \therefore y = \sqrt{3}.$$

【定義5】 2乗して a ($a > 0$) になる正の数を \sqrt{a} とかく。”ルート a ” と読んで下さい。

\sqrt{a} は, a の正の平方根と呼ばれます。 $-\sqrt{a}$ は, a の負の平方根です。 ★

(参考) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ などは, 有理数ではないことが証明されています。中学の数学3の教科書に証明はのっています。一度読んでみて下さい。これらの数は, 循環しない無限小数で, 無理数 (irrational number) と呼ばれています。ピタゴラスの定理ができた頃, 有理数ではないということも, 認識されていたようです。具体的な数値は次のようになります。

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.73205080756\cdots, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{5} = 2.23606797749\cdots,$$

などです。最後の $\sqrt{5}$ の小数表示を頭から8桁とって2乗してみると,

$$(2.2360679)^2 = 4.99999965341041$$

となります。すなわち, 8桁では, $\sqrt{5}$ の近似値でしかありません。2乗して5になる数は無限桁なんだな~, というのが何となくわかりますね。

【無理数を含む式の計算公式】 $a > 0, b > 0$ のとき, 以下の式がなりたつ:

$$(1) (\sqrt{a})^2 = a, \quad (-\sqrt{a})^2 = a.$$

$$(2) 0 < a < b \text{ のとき, } \sqrt{a} < \sqrt{b}, \quad -\sqrt{a} > -\sqrt{b}.$$

$$(3) \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$(4) \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \quad m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}.$$

$$(5) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}, \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b.$$

(6) (分母の有理化)

$$(i) \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}, \quad (ii) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}.$$

【例9】 (無理数を含む式の計算)

$$(1) \sqrt{24} \times \sqrt{18} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6} \sqrt{3 \cdot 6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 \cdot 6^2} = 2 \cdot 6 = 12.$$

$$(2) 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 11 - 2\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8 = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 3 \quad (\text{同じ無理数を含む項は同類項})$$

$$(3) (\sqrt{3} + 2)^2 - \sqrt{5}(\sqrt{15} - 2\sqrt{5}) = 7 + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 10 = 17 - \sqrt{3}.$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \quad (\text{分母の有理化})$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{5} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right)\sqrt{7} = -\frac{3}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{14}\sqrt{7}. \quad \heartsuit$$

図7. ③の円の周の長さは、どうやったら正確に求められるでしょうか？ 円に内接および外接する2つの正 n 角形の周の長さではさまれることはわかります。例えば、 $n = 20$ のとき内接円と外接円の周の長さ（これは高校で習う数学でわかる）から次の不等式がわかる：

$$3.128689301 < \ell < 3.167688806 \quad (1.7)$$

それでも、 $\ell = 3.1\dots$ （小数点以下1桁まで）しかわかりません。 n をもっともっと大きな数にしても、罫が明かない（らちがあかない）ことは明らかです。中・高の数学では手に負えません。

いわゆる極限の概念が必要になります。我々人間は、極限の概念から導かれた微積分の発見（17世紀後半、ニュートンおよびライプニッツによる）まで待たなければなりません。今の日本の教育では、大学で学ぶ微積分学でやっと円の周の長さがわかります（積分計算による）。やはり、無理数であるということがわかっています。図7. ③の円の周の長さは円周率と呼ばれていて、ギリシャ文字 π で表されます：

$$\text{円周率} \quad \pi = 3.141592653589793\dots \quad (\text{産医師異国に向こう産後厄なく賛})$$

半径 r の円の面積 S 、周の長さ ℓ は円周率 π を用いて

$$\text{円の面積} \quad S = \pi r^2, \quad \text{円の周の長さ} \quad \ell = 2\pi r \quad (1.8)$$

と表されます。

(参考) 円周率とは、”円の周の長さは直径の何倍か”という数のことです。図7. ③の円は直径1なので、周の長さイコール円周率です。

もうひとつ重要な無理数があります。それは、数列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.9)$$

の極限として表される数でネピアの数 (e とかく) と呼ばれています。どんな数列かは関数電卓で少し計算してみるとわかります。

$$n = 1 \text{ のとき} \quad \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$n = 2 \text{ のとき} \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$n = 3 \text{ のとき} \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.370\dots$$

$$\begin{aligned}
n = 4 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.4414\dots \\
n = 5 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} = 2.4883\dots \\
& \quad \vdots \\
n = 10 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = (1.1)^{10} = 2.5937\dots \\
n = 100 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = (1.01)^{100} = 2.7048\dots \\
& \quad \vdots \\
n = 10^8 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{10^8}\right)^{100000000} = (1.00000001)^{100000000} = 2.718281815\dots \\
n = 10^9 \text{ のとき} & \quad \left(1 + \frac{1}{10^9}\right)^{1000000000} = (1.000000001)^{1000000000} = 2.718281827\dots \\
& \quad \vdots
\end{aligned}$$

となるので、一定の数に収束していくようですね。この数は、高校の数学 III に出てきますが、きちんとした収束の証明は大学の微積分でやります。このネピアの数は、やはり無理数で次のような値です：

ネピアの数 $e = 2.71828182845904523\dots$ (フナ1羽2羽1羽2羽死後食おーよ御にいさん)

(参考) 関数電卓は、2千円以下で買えます。 a^n や \sqrt{a} の計算がワンタッチでできます。高校生になっても使えるので、持っているといいですね。スマートフォンの無料アプリの中にもいい関数電卓があるよ。

以上で、中学校で習う数は全部出てきました。数は我々の生活の中にありましたね。すなわち、この宇宙の中に燦然(さんぜん)と居座っていました。人間がそれらを一つ一つ発見してきたというのが、我々の歴史であり、数の歴史でもあります。

さて、有理数に無理数をたした数の集合は**実数** (real number) と呼ばれます。これらの集合を図示します：

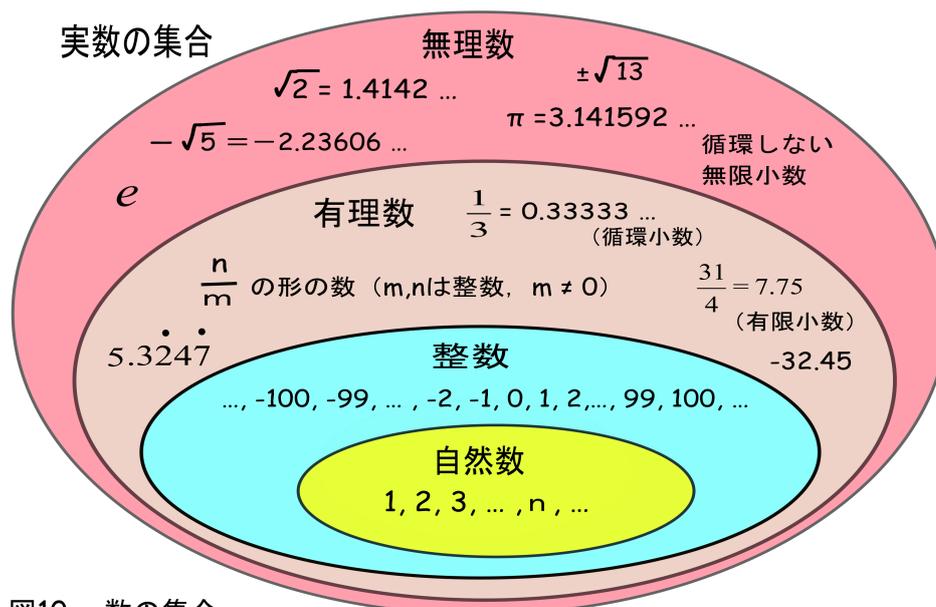


図10. 数の集合

自然数 n を用いた \sqrt{n} の形の無理数は無限個ありますよね。任意の正の実数 a に対して \sqrt{a} もまた無理数になり得ます。集合としての**実数の濃度は、有理数の濃度とくらべて濃いでしょうかね？** いくつか答えが得られるといいですね。

図 11. に、原点の近くの無理数や有理数を書き入れた数直線を示します。数直線は無限個の点からできていると考えて下さい。**点は大きさをもたない**（すなわち、面積 0）と考えます。したがって、**数直線は太さはありません**。一般の直線も同様です。数学であつかう点と直線とはこのようなものです。ノートに点や直線を書くと、大きさも太さもあるのに変だよな??

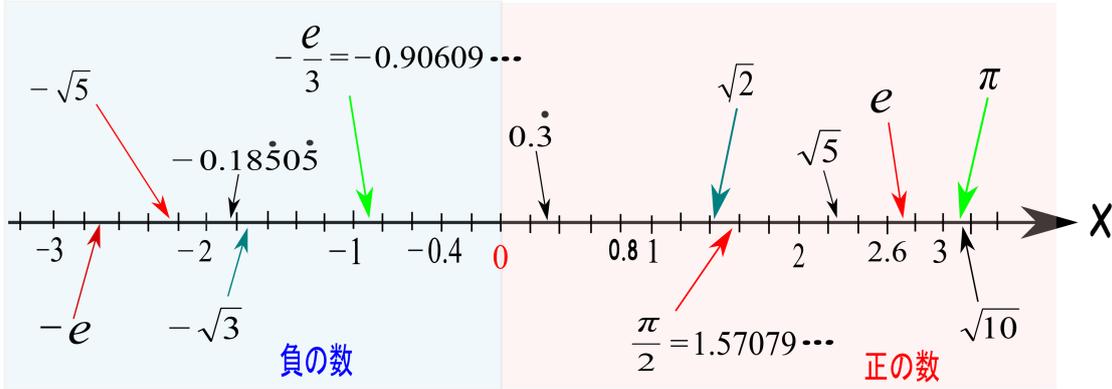


図11. 実数

数直線上の 1 点と 1 つの実数是对应していると考えて下さい。異なる 2 つの実数は、数直線上の異なる 2 点と対応します。数直線上のどんな小さな区間 $[a, b]$ にも無限個の点があるので、この区間に無限個の実数があります。無限とか無限に小さいとかは不思議な世界ですね。しかし、大学まで数学をやれば、すっきり納得(なっとく)できると思いますよ。まあ、頑張りましょう。

【演習問題 1. 3】

問 1. (1) 次の式を計算して簡単にせよ。

(a) $\sqrt{32} - 2\sqrt{2} - \sqrt{18}$ (b) $(2 - \sqrt{7})^2 - \frac{21}{\sqrt{7}}$ (c) $\sqrt{56} \div (-3\sqrt{2})$

(d) $\sqrt{(-2.7)^2} - \sqrt{0.49} - \sqrt{0.16} + 8\sqrt{\frac{25}{256}}$ (e) $\left(\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10} + 2}\right)^2$

(2) $\sqrt{5} < \sqrt{n} \leq 4$ を満たす自然数 n は全部でいくつあるか。

(3) $\sqrt{100 - 3n}$ が自然数になるような自然数 n はいくつあるか。

問 2. (1) 図 12. のような直角三角形 ABC がある。直線 BM と直線 AC は垂直、直線 MN と直線 BC は垂直である。線分 BM と線分 MN の長さを求めよ。また、 $\triangle ABM$ の面積を S 、 $\triangle BMN$ の面積を T としたとき、 $\frac{S}{T}$ の値を求めよ。

(2) 半径 1 の円 O に内接する正八角形 ABCDEFGH がある (図 12. の (2) 参照)。この正八角形の一辺 AB の長さを求めよ。また、円 O に外接する正八角形の一辺の長さを求めよ。内接正八角形と外接正八角形の周の長さを計算することにより、円周率 π を挟む不等式を求めよ。

(図 12. は次ページ)

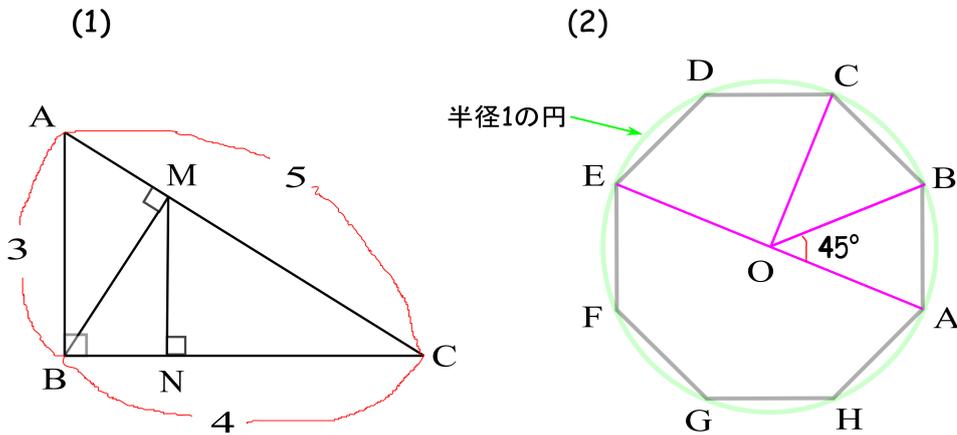


図12. 問2の図

第1章 問題の答

【演習問題 1.1】

- 問1. (1) 栗 50 個, タケノコ 5 本, わらび 30 本の束 10 個, 栗 25 個とわらび 30 本の束 5 個。
 (2) タケノコ 10 本とわらび 30 本の束 20 個, タケノコ 10 本と栗 100 個, わらび 30 本の束 20 個と栗 100 個。

- 問2. (1) -8 (2) -4 (3) -56 (4) -24
 (5) 与式 = $(100 + 5)(100 - 5) - (40 - 4)(40 + 4)$ に注意。答えは 8391。
 (6) 与式 = $(1000 - 8)^2$ に注意。答えは 984064。
 (7) 300 (8) -25 ((7), (8) は 7 ページの計算公式 2 を利用せよ)

【演習問題 1.2】

- 問1. (1) (a) -14 (b) $\frac{8}{75}$
 (2) (i) a の値を式の a に代入して計算する。すなわち, $(-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 8$ を計算する。
 答えは, 4 (ii) (i) と同様に計算する。答えは, 2。
 (3) (a) 29 (b) -41
- 問2. (1) 2 の肩にのっかっている数 (ベキ) が 4 のとき, 5 番目の数なので, 20 番目の数は 2^{19} 。
 (2) $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{19}$ とおき, $2S$ の式を作り, これら 2 つの式を利用する。
 $S = 2^{20} - 1$ 。

【演習問題 1.3】

- 問1. (1) (a) $-\sqrt{2}$ (b) $11 - 7\sqrt{7}$ (c) $-\frac{2}{3}\sqrt{7}$ (d) 4.1 (e) $\frac{21 + 2\sqrt{10}}{18}$
 (2) 6 から 16 までの整数 11 個 (3) $n = 12, 17, 25, 28, 32, 33$ の 6 個
- 問2. (1) $BM = \frac{12}{5}$, $MN = \frac{48}{25}$,
 $S = \frac{54}{25}$, $T = \frac{864}{25^2}$, $\frac{S}{T} = \frac{25}{16} = 1.5625$
- (2) (ヒント) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。 $AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ 。外接正八角形の一辺は $2(\sqrt{2} - 1)$ 。
 不等式は $4\sqrt{2 - \sqrt{2}} < \pi < 8(\sqrt{2} - 1)$ ($3.0614\dots < \pi < 3.3137\dots$)

補足（ほそく） 数列の無限和

§1. 自然数 n をどんどん大きくして、無限の大きさまで考えることを

$$n \rightarrow \infty \tag{1.10}$$

とかきます。自然数を1から順番にたして、全部たすと無限に大きくなることは明らかですね。これを

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = \infty \tag{1.11}$$

とかきます。奇数の和，偶数の和も全部たせば無限に大きくなるので

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + \cdots = \infty, \tag{1.12}$$

$$2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) + \cdots = \infty. \tag{1.13}$$

上の n 番目の奇数 $(2n - 1)$ と n 番目の偶数 $2n$ は、それぞれの数列の**一般項**と呼ばれます。無限個の数列の和が ∞ になるとき、または $-\infty$ になるとき、数列の和は**発散する**と言います。

【例1】自然数の逆数の和は発散することを示せ。すなわち；

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \infty. \tag{1.14}$$

証明) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (2個の和)

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad (4個の和)$$

同様に、 $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > 8 \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$, ... となるので

$$\begin{aligned} \text{与式} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty \quad (\text{無限個の } \frac{1}{2} \text{ の和は } \infty) \end{aligned}$$

与式は発散する数列の和よりも大きいので、発散する。 ■

【注意】自然数の逆数の数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ は一般項 $\frac{1}{n}$ を用いて $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ と表すことがあります。数列の各項は n が増えるとき、0に**収束**しますが、数列の和は発散するということです。

§2. 数列 ($a \neq 1$ とする)

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, \dots \tag{1.15}$$

の各項は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $0 < a < 1$ ならば 0 に収束し、 $1 < a$ ならば無限に大きくなります。

【例2】数列 $\{3^{n-1}\}$: $1, 3, 9, 27, \dots, 3^{n-1}, \dots \rightarrow \infty$

$$\text{数列 } \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \rightarrow 0 \quad \heartsuit$$

数列 (1.15) の初項から第 n 項までの和を求めよう。

$$\begin{aligned} S &= 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} \\ -) aS &= a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n \\ \hline (1-a)S &= 1 - a^n, \quad \therefore S = \frac{1 - a^n}{1 - a}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

式 (1.16) より、 $0 < a < 1$ のとき、 $a^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) だから、次のことがわかる。

$$0 < a < 1 \text{ のとき, } 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-a} \quad (1.17)$$

a のべきからなる無限個の数列の和の存在 (無限和の収束) が明らかになりました。式 (1.14) と比べると、非常に大きな差 (∞ の差) がありますね。

$$\begin{aligned} \text{【例 3】 } 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots &= 2 \\ 1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \cdots &= 10 \end{aligned}$$

♡

【定理 3】 自然数の 2 乗の逆数和は収束する。すなわち、一定値 l が存在して

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = l < 2. \quad (1.18)$$

証明) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$ (2 項の和)

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = 4 \frac{1}{4^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (4 \text{ 項の和})$$

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{15^2} < 8 \frac{1}{8^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (8 \text{ 項の和})$$

同様に、 $\frac{1}{16^2} + \cdots + \frac{1}{31^2} < 16 \frac{1}{16^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$, ... がわかるので

$$\text{与式} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots = 2$$

すなわち、第 n 項までの和 $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、単調増加で上からおさえられているので、ある一定値に収束する。 ■

【注意】 l は $\frac{\pi^2}{6} = 1.644934067 \dots$ であることがわかっている (これは大学の微積分で学ぶ)。
 π が出てくるなんて不思議だね！ **なぜだろうね？** ゆっくり考えて下さい。

問. ある数 a に、一定数 d ($d \neq 0$) を次々にたしていく数列を **等差数列** という：

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \cdots \quad \cdots \textcircled{1}$$

ある数 a ($a \neq 0$) に、一定数 r ($r \neq 1$) を次々にかけていく数列を **等比数列** という：

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots \quad \cdots \textcircled{2}$$

次の問に答えよ。

(1) 数列 ①, ② に対して、一般項 および 初項から第 n 項までの和を求めよ。

(2) 等比数列 ② の無限和が収束するための必要十分条件を示し、その和を求めよ。

(この間は高校で習う内容だが、ここまでこのテキストを読んだあなたは解答できるよね！)

(問の答) (1) ① の一般項 $a + (n-1)d$, n 項までの和 $\frac{2a + (n-1)d}{2}$.

② の一般項 ar^{n-1} , n 項までの和 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

(2) 必要十分条件は $-1 < r < 1$, 無限和は $\frac{a}{1-r}$.

第2章 整数の性質, 方程式の解

§ 2.1 素数と整数の性質

【定義1】 2つの整数 a, b がある整数 k によって $b = k \times a$ と表されているとき, b を a の倍数という。また, a は b の約数と呼ばれる。

特に, 0 はすべての整数の倍数である。($\because 0 = 0 \times a$.)

また, 1 はすべての整数の約数である。($\because b = b \times 1$.)

★

【例1】 $\cdot 21 = 3 \times 7$ だから, 21 の約数は 1, 3, 7, 21.

$\cdot 30 = 2 \times 3 \times 5$ だから, 30 の約数は 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

$\cdot 41$ の約数は, 1 と自分自身だけである。

♡

【定義2】 自然数でちょうど2個の正の約数をもつものを素数 (prime number) と呼ぶ。

★

【例2】 $\cdot 1$ は素数ではない。(\because 約数は1のみ)

$\cdot 3$ は, 1 と3のちょうど2個の約数をもつので素数である。

$\cdot 6$ は, 1, 2, 3, 6の4個の約数をもつので素数ではない。

$\cdot 1$ と自分自身を 自明な約数 と呼ぶこともある。このとき, 素数は” 自明でない約数を持たない自然数 ”と定義してよい。

$\cdot 100$ までの素数は,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,

43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

の25個である。連続した奇数が素数のとき, それらを ふたご素数 という。例えば,

11 と 13, 59 と 61, \dots , 821 と 823, \dots

などはふたご素数である。ふたご素数っていくつあるんだろうね?

♡

整数の範囲で割り算 ($a \div b$) をしたとき, 商が q で余りが r のとき, 関係式

$$a = q \times b + r \quad (0 \leq r < b) \quad \dots \textcircled{1}$$

がなりたつ。

(例) $25 \div 7$ は商が3, 余りが4なので, $25 = 3 \times 7 + 4$.

正の整数がいくつかの自然数の積で表されるとき, その1つ1つの数を 因数 といい, 素数である因数を 素因数 という。

自然数を, 素因数の積で表すことを 素因数分解 という。

(例) $28 = 2^2 \times 7$, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

【例3】 (1) 1 から 50 までの自然数で, 2 の倍数, 3 の倍数, 6 の倍数をすべて求めよ。

(2) 120 および 630 を素因数分解せよ。

解答) 次ページの図 13. で答えを示す。読者は下の空欄に答えをかいてみて下さい

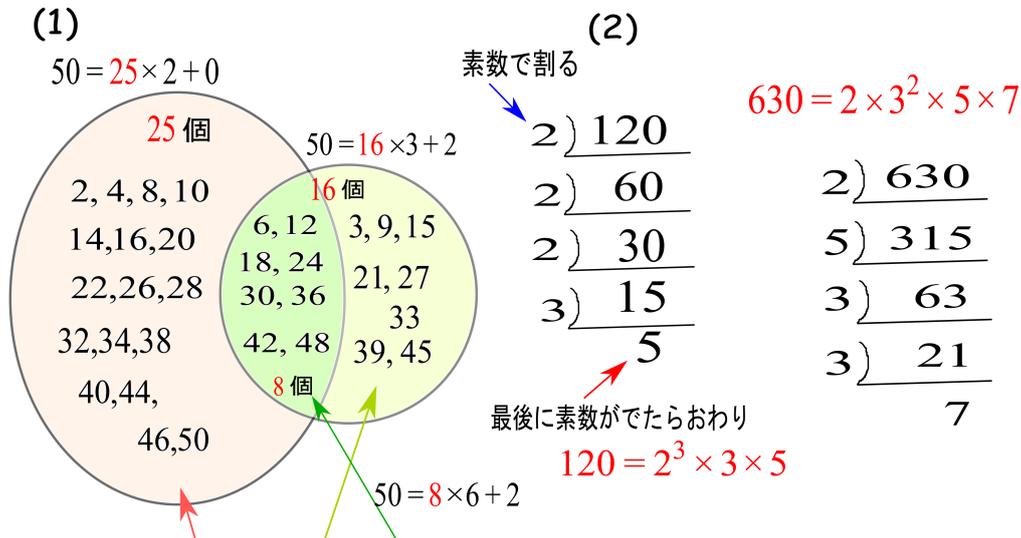


図13. 2の倍数, 3の倍数, 6の倍数, 素因数分解

【定義3】 いくつかの整数に共通な約数を**公約数**という。公約数のうち、最大のものを**最大公約数**という。いくつかの整数に共通な倍数を**公倍数**という。公倍数のうち、最小のものを**最小公倍数**という。 ★

(例) 6, 12, 30の最大公約数は6, 最小公倍数は60である。3つの数を素因数分解しておくとうわかりやすいよ。

($\because 6 = 2 \cdot 3, 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3, 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ より, 3つの数に共通な素因数は2と3, これら以外の因数は2と5, 全部をかけると最小公倍数 $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. を得る)

【例4】 (1) 「連続する3つの整数の和は3の倍数である」を証明しなさい。

(2) 252の約数の個数を求めよ。

(3) 18, 27, 45のどの数でわっても10余る3桁の自然数をすべて求めよ。

(4) $\frac{5880}{n}$ が自然数の平方となるような, 最も小さい自然数 n の値を求めよ。(平成2年, 神奈川)

解答 (1) [証明] 3つの整数を $k, k+1, k+2$ とおいて, これらの和を計算すると

$$k + (k+1) + (k+2) = 3k+3 = 3(k+1).$$

$(k+1)$ は整数なので, $3(k+1)$ は3の倍数である。 ■

(2) 素因数分解すると $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ だから, 1と252を除いた約数は,

単独の数 ; 2, 4, 3, 9, 7, 2数の積 ; $2 \cdot 3, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 7, 2 \cdot 3^2, 3^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 3^2,$
 3数の積 ; $2 \cdot 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

だから, ぜんぶで 18個 である。

(3) 3つの数の公倍数プラス10が答えの候補(こうほ)である。まず, 最小公倍数を求めよう。

$$18 = 3^2 \cdot 2, 27 = 3^3, 45 = 3^2 \cdot 5 \text{ だから, 最小公倍数は } 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = 270.$$

3桁の公倍数は, 270, 540, 810 なので, 答えは 280, 550, 820 である。

(4) $5880 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ だから, 与式が自然数の平方になるのは次の3つ ;

$$\frac{2880}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2} = 2^2, \quad \frac{2880}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = 7^2, \quad \frac{2880}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 7^2 = (14)^2$$

分母が一番小さくなるのは最後のものなので, 答えは $n = 30$. ♥

【演習問題 2. 1】

問 1. りんご 56 個, なし 40 個, かき 128 個を, 何人かの子供に同じ数ずつ余りのないように分けたい。できるだけ多くの子供に分けるものとして, 次の問に答えよ。

- (1) 何人の子供に分けることができるか。
- (2) 1人当たりの, りんご, なし, かきの個数を求めよ。

問 2. あるバス停から, A 町行きのバスは 12 分ごとに, B 町行きのバスは 18 分ごとに, C 町行きのバスは 24 分ごとに発車している。午前 7 時ちょうどに, これらが同時に発車したとき, 次にこの 3 系統のバスが同時に発車する時刻を求めよ。

問 3. 素因数分解が 1 桁の素数だけからなる自然数について, 次の問に答えよ。

- (1) 4 桁の自然数で最小のものを求めよ。
- (2) 2000 をこえない自然数で最大のものを求めよ。

問 4. 200 の約数 1, 2, 4, \dots , 100, 200 について考える。次の問に答えなさい。

(ラ・サール高, 鹿児島)

- (1) 約数すべての和を $S = 1 + 2 + 4 + \dots + 100 + 200$ とおく。 S を素因数分解せよ。
- (2) 約数すべての 2 乗の和を $T = 1^2 + 2^2 + 4^2 + \dots + 100^2 + 200^2$ とおく。 T を素因数分解せよ。
- (3) 約数すべての逆数の和を $U = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{200}$ とおく。 U を求めよ。
- (4) 約数すべての逆数の 2 乗の和を $V = \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{200}\right)^2$ とおく。 V を求めよ。

§ 2.2 数学の命題について (高校で習う範囲)

【定義 4】 正しいか, 正しくないかが定まる文や式を**命題**という。命題が正しいとき, その命題は**真**であるといい, 正しくないとき, その命題は**偽**であるという。★

(例 a) 「1 桁の素数は, 2,3,5,7 の 4 つである」 (正しい命題)

(例 b) 「 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ 」 (正しくない命題)

例 a で, 2 つの条件を p : 1 桁の素数, q : 2,3,5,7 の 4 つ としたとき, 例 1 は p ならば q (これを記号で $p \implies q$ とかく) と表すことができる。

【定義 5】 一般に, 命題を $p \implies q$ と表す。これは, 「 p を満たすものはすべて q を満たす」という意味である。 p は**仮定**, q は**結論**とよばれる。命題 $p \implies q$ と $q \implies p$ がともに真のとき, p と q は**同値**であるといい, $p \iff q$ とかく。★

(例 c) $a = b \iff (a - b)^2 = 0$.

【定義 6】 条件 p に対して, 「 p でない」も条件であり, これを p の**否定**といい, \bar{p} で表す。条件 \bar{p} の否定は p である。★

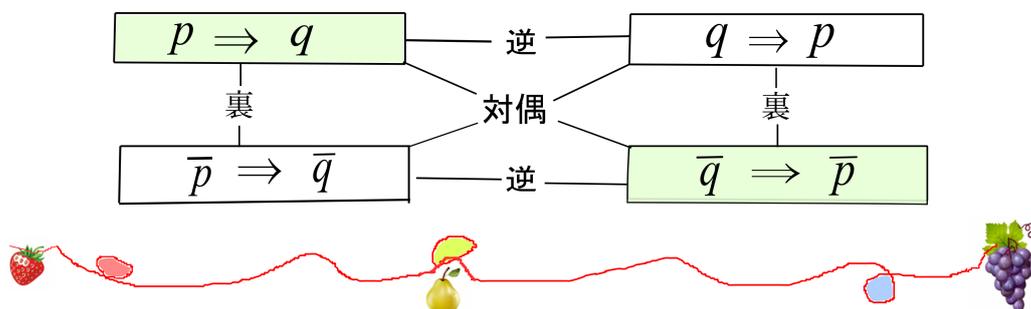
(例 d) 変数 x, y, a, b は実数とする。

- ・「 x は有理数である」の否定は「 x は有理数でない」すなわち「 x は無理数である」.
- ・「 $y > 0$ 」の否定は「 $y > 0$ でない」すなわち「 $y \leq 0$ 」.
- ・「 $a > 0$ または $b > 0$ 」の否定は「 $a \leq 0$ かつ $b \leq 0$ 」.
- ・「 a, b の少なくとも一方は有理数」の否定は「 a, b ともに無理数」.

一般に、「かつ」、「または」の否定は、次のようになる：

$$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \bar{p} \text{ または } \bar{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \iff \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}.$$

【定義7】 命題 $p \implies q$ の逆, 対偶, 裏を次のように定義する。



(例)

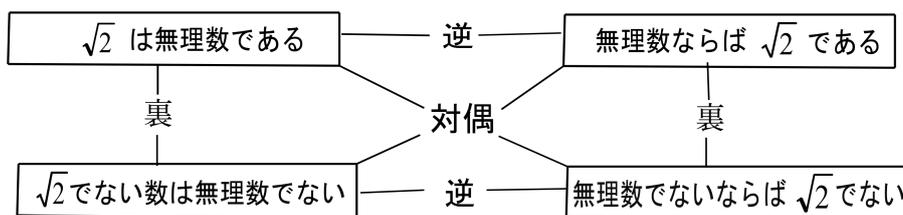


図. 命題,逆,対偶,裏の関係

【例5】 a, b は実数とする。命題「 $a = b \implies a^2 = b^2$ 」の逆は「 $a^2 = b^2 \implies a = b$ 」。最初の命題は真である。なぜならば、条件「 $a = b$ 」の両辺を2乗すれば、 $a^2 = b^2$ となるからである。また、逆の命題は偽である。なぜならば、 $a = -2, b = 2$ のとき、結論が成り立たないからである。このように、偽を示す例 $a = -2, b = 2$ を反例という。反例は1つ示せばよい。♥

上の図の中で示した命題「 $\sqrt{2}$ は無理数である」とこれの対偶「無理数でないならば $\sqrt{2}$ でない」はともに真である。しかし、逆と裏は、ともに偽であることは明らかである（読者は、反例をすぐあげられると思います）。

きちんとした証明はしませんが、次の結果がなりたちます。

【定理4】 (1) もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

(2) 命題とその対偶の真偽は一致する。

上の(2)の結果より、命題の証明がむづかしいとき、その対偶を証明すればよい。

【例6】 n は整数とする。命題「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である」を証明せよ。

証明) 対偶「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である」を証明する。

奇数 n は、ある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。このとき、

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \cdots \text{①}$$

となる。 $2k^2 + 2k$ は整数で、 $2(2k^2 + 2k)$ は偶数。したがって式①は奇数である。命題の対偶が証明できたので、もとの命題は真である。■

【定義8】 命題を証明する次のような証明法を背理法（はいりほう）という。

- I. 命題がなりたないと仮定する。
- II. Iの仮定のもとで矛盾を導く。

III. IIで矛盾が生じたのは、Iの仮定がまちがっていたからである。

IV. したがって、もとの命題がなりたつ。 ★

さて、定義7のところで示した命題「 $\sqrt{2}$ は無理数である」を背理法で証明しよう。この証明は中学の教科書にもものっているのですが、すでに学んでいるかもしれませんね。

証明) $\sqrt{2}$ は、無理数でないと仮定すると、有理数でなければならない。したがって、

$$a \text{ を整数, } b \text{ を } 0 \text{ でない整数として, } \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \cdots \text{ ①}$$

と表すことができる。ただし、 $\frac{a}{b}$ はできるかぎり約分して、 a, b が1以外の公約数をもたないようにしておく。

$$\text{式①の両辺を2乗すると, } 2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \quad \cdots \text{ ②}$$

となるが、 $\frac{a}{b}$ の分母と分子に共通な約数は1以外にないから、 $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ も約分できない。

したがって、 $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ が整数2になることはない。すなわち、②はなりたたない。仮定①がまちがっていたので、命題は証明された。 ■

【定義9】 2つの整数 a, b の最大公約数が1のとき、 a と b はたがいに素であるという。 ★

(例) 3つの整数のペア、3と11、-15と8、22と27、はたがいに素である。

33と121は、最大公約数が11なので、たがいに素ではない。

【例7】 命題「2つの正の整数 a, b がたがいに素のとき、 $a+b$ と ab はたがいに素である」を証明せよ。

証明) 背理法を用いて証明する。

$a+b$ と ab の最大公約数が $k (> 1)$ と仮定すると、

$$a+b = kA \quad \cdots \text{ ①} \quad ab = kB \quad \cdots \text{ ②} \quad (A, B \text{ は整数})$$

と表すことができる。①より、 $b = kA - a$ 。これを②に代入すると、 $a(kA - a) = kB$ より、

$$a^2 = k(aA - B) \quad \cdots \text{ ③}$$

を得る。すなわち③より、「 k は a^2 の約数である。」 \cdots ④

同様に、 k は b^2 の約数である \cdots ⑤

もわかる。

a と b はたがいに素なので、 $a = p_1 p_2 \cdots p_m$ 、 $b = q_1 q_2 \cdots q_n$ と素因数分解したとき、これら $(m+n)$ 個の素因数からなる約数はすべて異なる。(注意; p_1 はある素数の2乗かもしれない)

$$a^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_m^2, \quad b^2 = q_1^2 q_2^2 \cdots q_n^2$$

だから、④、⑤より、例えば、 $k = p_1^2 = q_1^2 q_2^2$ かもしれない(このような等式は1つに定まらない)。このとき、 $p_1 = q_1 q_2$ となり、 a と b はたがいに素であるということに矛盾する。 ■

【演習問題2. 2】

問1. a, b は実数とする。次の条件の否定を述べなさい。

(1) $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$

(2) $a = 0$ または $b = 0$

(3) a, b は共に有理数

(4) 2つの素数の和は偶数である

問2. (1) 正の整数 a, b の最大公約数を d 、最小公倍数を m とすると、 $dm = ab$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、命題「 $1 + 2\sqrt{2}$ は無理数である」を証明せよ。

(3) p, q は有理数とする。 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、命題「 $p+q\sqrt{2}=0 \implies p=q=0$ 」を証明せよ。

問3. 命題「 x, y は整数とする。 $x^2 + y^2$ が奇数ならば、積 xy は偶数である」を証明せよ。

§ 2.3 素数の性質 (素数は素敵な数?)

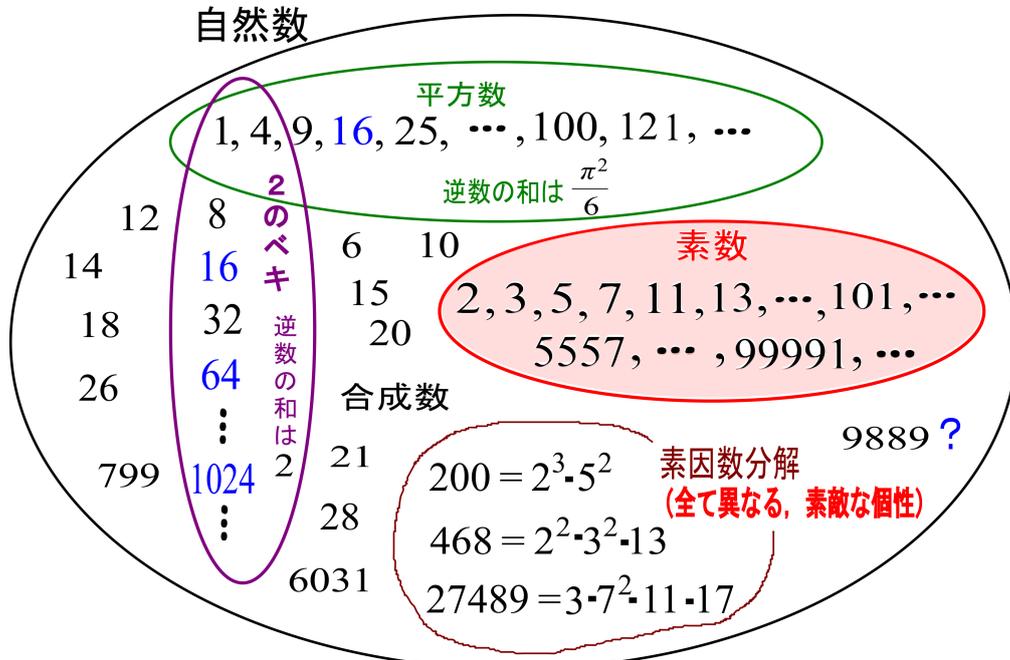


図14 自然数, 素数

素数は、1と自分自身しか約数をもたない数でした。けっこう特殊な数ですよ。2以上で素数でない数は**合成数**と呼ばれます。「2つの異なる合成数の素因数分解は、異なる」ことは自明ですよ。例えば、

(例) $248 = 2^3 \cdot 31, \quad 228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19.$

数の素因数分解は一意（ひととおりしかない）なので、すべての数は素敵な個性を持っているということです。人間も同じですよ。すべての人は他人と違ったりっぱな個性を持っているので、存在価値があるのでですよ。

与えられた1つの自然数 n が素数であることは、どうすればわかるのでしょうか？ 割り算して、1と n 以外の約数が見つければ素数ではなく、合成数です。しかし、約数がなかなか見つからないこともありますよね。次の定理が役に立つでしょう。

【定理5】 自然数 n が \sqrt{n} をこえない最大の整数以下のすべての素数で割り切れなければ、 n は素数である。

証明) 背理法を用いる。すなわち、結論を否定して、矛盾を導こう。 a は \sqrt{n} をこえない最大整数とする。 $a \leq \sqrt{n}$ に注意せよ。

a 以下のすべての素数で割り切れないのに、 n が合成数であると仮定する。このとき、 n は $a \leq \sqrt{n} < p$ なる素数 p で割り切れるので、 $n = pq$ とかける。 q は $1 < q \leq a$ でなければならない。なぜならば、 $q > a$ とすると $pq > \sqrt{n} \sqrt{n} = n$ となるからである。すなわち、 n は a 以下の素数で割り切れることになり矛盾。 ■

私は、10万までの素数を作成してみました。全部で9592個あり、最後のものは99991でした。約

9.6%が素数でした。素数か否かの判定は、上の定理を使ってやりましたよ。 $\sqrt{99991} = 316.2\dots$ であり、316までの素数は65個なので、多くて65回の割り算が必要です。手計算でやるのはちょっと無理ですね。こんなとき、コンピューターが役に立ちますね。

さて、素数っていくつあるんでしょうかね？やはり無限個でしょうか。答えは、紀元前にわかっていたようです。

【定理6】素数は無限に存在する。

証明) 背理法を用います。素数は有限個しか存在しないと仮定します。これらすべての素数を小さい順に $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ とかきます。

$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ を考えます。 N は $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ のどれで割っても割り切れない数だから、(i)「 N は素数である」かまたは(ii)「 N は $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 以外のある素数で割り切れる」ということになる。(i),(ii)いずれの場合も、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ がすべての素数であることに矛盾する。 ■

自然数の中で、**素数の分布(濃度)**はどのくらいでしょうか。こんなことを考える人間って、面白(おもしろ)おかしいよね。変な生き物だね。こんな間については、逆数の和が、ある程度のことを教えてくれるようです。もう、次の3つの式は以前にでていますね；

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty. \tag{1.14}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = 2$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} < 2. \tag{1.18}$$

自然数の列の逆数の和は発散するが、

$$\text{数列 } \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}, \dots\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\} \tag{2.1}$$

$$\text{と 数列 } \{1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2, \dots\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\} \tag{2.2}$$

の逆数の和は存在します(共に有限の値)。数の集合(2.1),(2.2)は、自然数の中ではすごく少ない集合(自然数の中での分布が非常に小さい)なので、和が存在するのでしょうか？

例えば、自然数の中では100分の1くらいの分布である数列

$$\{1, 100, 200, 300, 400, 500, \dots\} \tag{2.3}$$

の逆数の和 S は

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots + \frac{1}{100n} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{100} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right) = \infty \end{aligned} \tag{2.4}$$

となり、有限の値に収束しません。同様にして考えると、自然数の1万分の1くらいの分布でも発散ですよ。『**どんな分布ならばその逆数の和が収束するのか**』は難しそうな問題ですね。

素数の逆数の和が発散することは、オイラー(Euler, 1707-1783, スイス)によって証明されています。

【定理7】素数の逆数の和は発散する；

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots = \infty. \tag{2.5}$$

証明) は、大学で習う範囲の数学を使うので、省略します。 ■

上の定理を見るかぎり、素数は自然数の中にけっこうたくさんあるようです。例えば、1つ

の自然数 n をもってきたとき、 n より小さい素数はいくつあるんでしょうか？というような問題がわかれば、素数の分布ももっとよく分かるでしょうね。

素数にかかわる未知の問題は、まだいくつかあって、今も多くの数学者が挑戦していますよ。中・高生であるあなたも将来挑戦してみませんか。

【演習問題 2. 3】

問 1. 次の数のペアのうち、ふたご素数はどれか答えよ。

- (1) 311, 313 (2) 521, 523 (3) 749, 751 (4) 827, 829 (5) 911, 913

問 2. (1) 次の整数を、2 個またはそれ以上の連続した整数の和で表せ。例えば、
 $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, $12 = 3 + 4 + 5$ のように。ただし、答えは 1 つとは限らない。

- 38, 42, 43, 76, 296, 365, 378, 566.

- (2) 1 より大きい奇数は、連続した 2 つの整数の和で表されることを示せ。
 (3) 3 で割り切れる正の偶数は、連続した 3 つの整数の和で表されることを示せ。
 (4) 8 で割ったとき余りが 4 になる正の整数は、連続した 8 個の整数の和で表されることを示せ。

§ 2.4 方程式の解

1. 因数分解. 文字 x, y を含む式の**因数分解**を考えよう。与えられた式を、2 つ以上の式の積で表すことです。いくつかの例で見てみよう。

- 【例 8】
- ・ $-5x + 10 = -5(x - 2)$, (-5 と $(x - 2)$ は因数と呼ばれる)
 - ・ $2xy + 3y = (2x + 3)y$ ($(2x + 3), y$ は因数)
 - ・ $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ ($(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$ の逆の演算, $(x + 1)$ は因数)
 - ・ $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$ ($(y - 2)(y - 2) = y^2 - 4y + 4$ の逆の演算)
 - ・ $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ ($(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ の逆の演算)
 - ・ $y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$ ($(y + 4)(y - 4) = y^2 - 16$ の逆の演算)
 - ・ $49x^2 - 36 = (7x + 6)(7y - 6)$ (上式の応用)
 - ・ $x^2y^2 - 4y^2 = (x^2 - 4)y^2 = (x + 2)(x - 2)y^2$ ($(xy + 2y)(xy - 2y)$ も可) ♥

【因数分解公式 1】

- (1) $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ (複号同順; 前の二重符号が上の+のとき, 後の符号も上の+)
 (2) $a^2x^2 \pm 2abx + b^2 = (ax \pm b)^2$ (複号同順)
 (3) $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ (4) $a^2y^2 - b^2 = (ay + a)(ay - a)$

【例 9】 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ の応用。

- ・ $x^2 + 5x + 6$ では、**たして 5, かけて 6** となる 2 数は **3 と 2** なので, 上の公式より

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

と因数分解できる。

- ・ $x^2 + 4x - 32$ では、**たして 4, かけて -32** となる 2 数は **8 と -4** なので,

$$x^2 + 4x - 32 = (x + 8)(x - 4)$$

と因数分解できる。

- ・ $x^2 - 15x + 50$ では、**たして -15, かけて 50** となる 2 数は **-10 と -5** なので,

$$x^2 - 15x + 50 = (x - 10)(x - 5)$$

と因数分解できる。

- ・ $2x^2y - 24xy - 56y = 2y(x^2 - 12x - 28) = 2y(x - 14)(x + 2)$ ♥

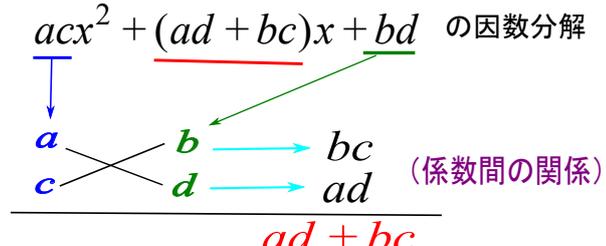
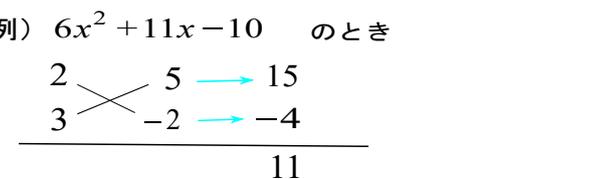
<p>$x^2 + Ax + B$ の因数分解</p> <p>たして A, かけて B となる2数 a, b を見つけたとき</p> <p>$x^2 + Ax + B = (x+a)(x+b)$</p> <p>(例) $x^2 + 6x - 16$ $a + b = 6$ $ab = -16$ となる a, b は $a = 8, b = -2$</p> <p>$\therefore x^2 + 6x - 16 = (x+8)(x-2)$</p>	<p>$acx^2 + (ad + bc)x + bd$ の因数分解</p>  <p>がなりたつとき $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$</p> <p>(例) $6x^2 + 11x - 10$ のとき</p>  <p>$\therefore 6x^2 + 11x - 10 = (2x+5)(3x-2)$</p>
--	--

図15 【因数分解公式2】

上図左に、 x^2 の係数が1のときの2次式の因数分解の方法をまとめました。右図は x^2 の係数が1でないときの因数分解の方法です。下の例10を見ながら使えるようにして下さい。

【例10】 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ の応用。

与えられた2次式が、 $acx^2 + (ad + bc)x + bd$ のとき、図15, 右図のような係数間の関係がなりたつとき、因数分解は $(ax + b)$ と $(cx + d)$ の積になります。図と例をしっかりとながめてくれれば、なっとくできるかな？

・ $15x^2 - 2x - 8$ の因数分解を考えましょう。係数間の関係は、いくつか考えられます。

$\begin{array}{r} 3 \searrow -2 \rightarrow -10 \\ 5 \nearrow 4 \rightarrow 12 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \searrow 8 \rightarrow 8 \\ 1 \nearrow -1 \rightarrow -15 \\ \hline -7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \searrow 2 \rightarrow 10 \\ 5 \nearrow -4 \rightarrow -12 \\ \hline -2 \end{array}$
---	--	--

最初の2つは、正しい係数間の関係になっていません。最後のものが正しい関係なので、答えは

$$15x^2 - 2x - 8 = (3x + 2)(5x - 4).$$



x の1次式, 2次式, 3次式などが与えられたとき, これらの式の割り算について考えてみましょう。

【例11】 $A = 2x - 3, B = 2x^2 - 5x + 6, C = 6x^3 + 11x^2 - 8x - 7$ のとき,

$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{C}{B}$ の計算をせよ。

答えは, 次の図16で示します。読者は下の空欄で計算してみてください (ちょっと狭いかな)。

$$\begin{array}{r}
 \frac{B}{A} \\
 2x-3 \overline{) 2x^2 - 5x + 6} \\
 \underline{2x^2 - 3x} \\
 -2x + 6 \\
 \underline{-2x + 3} \\
 \text{余り } 3 \\
 \hline
 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(2x-3) + 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \frac{C}{A} \\
 2x-3 \overline{) 3x^2 + 10x + 11} \\
 \underline{6x^3 + 11x^2 - 8x - 7} \\
 6x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 20x^2 - 8x \\
 \underline{20x^2 - 30x} \\
 22x - 7 \\
 \underline{22x - 33} \\
 26 \\
 \hline
 6x^3 + 11x^2 - 8x - 7 \\
 = (3x^2 + 10x + 11)(2x - 3) + 26
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{C}{B} \\
 2x^2 - 5x + 6 \overline{) 6x^3 + 11x^2 - 8x - 7} \\
 \underline{6x^3 - 15x^2 + 18x} \\
 26x^2 - 26x - 7 \\
 \underline{26x^2 - 65x + 78} \\
 \text{余り } 39x - 85 \\
 \hline
 6x^3 + 11x^2 - 8x - 7 \\
 = (3x + 13)(2x^2 - 5x + 6) + 39x - 85
 \end{array}$$

図16 式の割り算



上の例から、式の割り算も基本は数の割り算と同じようにできることがわかりましたかね。なっとくできない方は、例11の計算を何度もやってみてください。

$n \geq m$ とします。 x の n 次式 $f(x)$ を、 x の m 次式 $g(x)$ で割ったときの、商を $q(x)$ 、余りを $r(x)$ とすると、次式が成り立つ：

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad (r(x) \text{ は、} x \text{ の } (m-1) \text{ 次以下の式}) \quad (2.6)$$

特に、割る式が x の1次式 $(x-a)$ のとき、余りは定数 b となる：

$$f(x) = q(x)(x-a) + b. \quad (2.7)$$

このとき、 $b=0$ ならば、 $f(x)$ は $(x-a)$ で割り切れる。すなわち、 $(x-a)$ を因数にもつ。次の定理がなりたつのがわかる。

【定理8】(因数定理) x の n 次式 $f(x)$ の x に a を代入したとき、0 となるならば、すなわち、 $f(a) = 0$ ならば、 $f(x)$ は $(x-a)$ を因数にもつ。

【例12】 次式を因数分解せよ。

$$(1) 5x^2 - 6x - 32 \quad (2) x^3 - 1 \quad (3) 2x^3 - 3x^2 - 18x + 27 \quad (4) x^4 - x^3 - 2x - 4$$

解答) 与えられた式を $f(x)$ とする。(1) $f(-2) = 20 + 12 - 32 = 0$ だから、 $(x+2)$ を因数にもつ。 $f(x) = (x+2)(5x-16)$.

(2) $f(1) = 0$ なので、 $(x-1)$ を因数にもつ。割り算をして $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$.

(3) $f(x) = 2x(x^2-9) - 3(x^2-9) = (2x-3)(x^2-9) = (2x-3)(x-3)(x+3)$. 因数定理を用いたとき、 $f(3) = 0$ なので、割り算をしても求められる。

(4) $f(2) = 16 - 8 - 4 - 4 = 0$ なので、 $(x-2)$ を因数にもつ。割り算をして、

$$f(x) = (x-2)(x^3+x^2+2x+2) = (x-2)\{x(x^2+2)+x^2+2\} = (x-2)(x+1)(x^2+2). \quad \heartsuit$$

【因数分解公式3】

- (1) $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = (x \pm a)^3$ (複号同順) (2) $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$ (複号同順)
 (3) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 (4) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
 (5) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

2. 1次方程式, 連立1次方程式. 平面上にある1点Pの位置を表すのに, 我々は座標平面というものを使っています。直交した2本の数直線 (x 軸と y 軸) で点の位置を表します。 x 軸と y 軸の交点は原点と呼び, O で表します。中学校で学ぶ, 座標平面と直線 (1次関数) や放物線 (2次関数) などのグラフを次の図で復習しておきましょう。

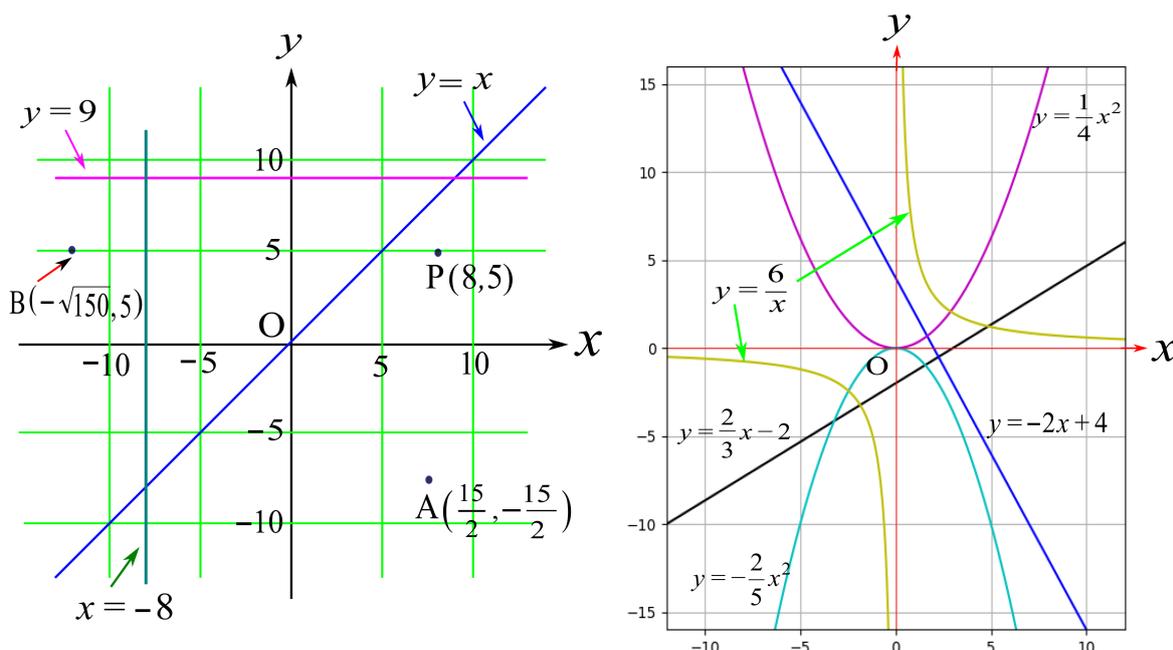


図17 座標平面上の点, 直線・放物線など

例えば, $y = -2x + 4$ のグラフとは, この1次式を満たす点 (x, y) (無限個の点からなる) の集合です。グラフを G で表すと,

$$G = \{ (x, y) \mid y = -2x + 4, -\infty < x, y < \infty \}$$

とかくことができます。1次関数のグラフは, 直線になり, 2次関数のグラフは放物線と呼ばれる曲線になります。

グラフを手で描くときは, 式を満たす点 (x, y) の表を作り, それらの点をなめらかに結べば, なんとか描くことができます。もし, $y = \frac{6}{x}$ ならば (このグラフは双曲線), 表

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	...
y	...	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	-6	-12	\times	12	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$...

を作り, 各点をなめらかに結んでください。原点では (分母が0になる点), 関数は定義されないので注意すること。正の x が0に近づくと, y の値は無限に大きくなります。負の x が0に近づくと, y の値はマイナスの無限大になります。

【定義10】 (1) 未知変数 x と定数 a, b をふくむ, x の1次式

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0) \tag{2.8}$$

を, x の1次方程式という。方程式 (2.8) を満たす x を1次方程式の解と呼ぶ。

(2) 2つの未知変数 x, y を含む2本の1次式

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases} \quad (2.9)$$

を, x, y の連立1次方程式という。 a, b, c, d, k, l は定数である。方程式(2.9)を満たす x, y を連立1次方程式の解と呼ぶ。

方程式の解を求めることを, 方程式を解くという。 ★

【例11】 (1) 次の1次方程式を解け。

(a) $5x + 10 = -20$ (b) $\frac{3}{4}x - 10 = \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$ (c) $0.04x - 0.2(0.5x - 1) = -0.04$

(2) 次の連立1次方程式を解け。

(a) $\begin{cases} 6x - y = 10 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 6 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{2x+5y}{3} \\ x+5y = 1 \end{cases}$

解答 (1) (a) $5x = -30 \therefore x = -6$. (答え) (b) $3x - 40 = 10x - 5, -7x = 35 \therefore x = -5$.

(c) 両辺を100倍して, $4x - 2(5x - 10) = -4, -6x = -24 \therefore x = 4$.

(2) (a) 2つ目の方程式は, $-6x + 9y = 12$ だから, 2つの式を並べてたし算する (加減法)。

$$\begin{array}{r} 6x - y = 10 \\ +) -6x + 9y = 12 \\ \hline 8y = 22 \end{array} \therefore y = \frac{11}{4}. \text{このとき, } 6x = 10 + \frac{11}{4} = \frac{51}{4}, \therefore x = \frac{17}{8}.$$

(b) 第1式を第2式の y のところに代入する (代入法) と, $-2x + 3\left(\frac{3}{2}x - 6\right) = 7$,

$$\frac{5}{2}x = 25 \therefore x = 10. \text{このとき, } y = \frac{3}{2} \cdot 10 - 6 = 9.$$

(c) 第1式を分母を払ってせいとんすると, $-3x - 10y = 2 \dots \textcircled{1}$ 第2式より,

$2x + 10y = 2 \dots \textcircled{2}$ だから, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より, $-x = 4 \therefore x = -4$. これを第2式に代入して $y = 1$ を得る。 ♥

方程式をいくつか解いてみると, 次のようなことがわかります。

- I. 方程式(2.8),(2.9)の定数が有理数のとき, 解も有理数である。
- II. 連立1次方程式(2.9)の解とは, 2つの方程式が表す2本の直線の交点である。2本の直線が平行のとき, 解は存在しない。また, 2本の直線が一致するとき, 直線上の任意の点が解(無限個あり)である。(下図参照)

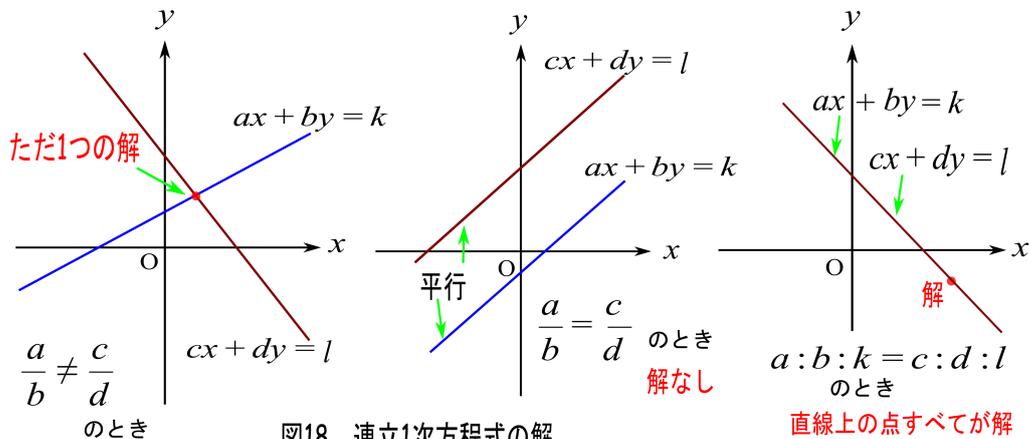


図18 連立1次方程式の解

3. 2次方程式, 高次方程式(3次以上の方程式) 初めに, 次の x の2次方程式を考えましょう。

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (a \neq 0) \quad (2.10)$$

この方程式は, 因数分解ができて $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ と表されるならば, 解は $x = \alpha$ と $x = \beta$ です。

因数分解できないときは, **解の公式**で計算できます。解の公式とは, 四則演算と平方根を用いて解を表現したものです。以下, $a > 0$ として, 求めてみましょう:

$$\begin{aligned} (2.10) \text{ より, } \quad a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = 0 &\rightarrow a \left\{ x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right\} + c = 0 \\ \rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 &\rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \rightarrow \\ x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\text{解の公式}) \quad (2.11) \end{aligned}$$

解の公式は, $D = b^2 - 4ac$ (これは**判別式**と呼ばれている) が ≥ 0 以上のとき, 使えますね。すなわち,

- 1) $D = b^2 - 4ac > 0$ のとき, **異なる2つの実数解** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ をもつ。
- 2) $D = b^2 - 4ac = 0$ のとき, **重解** $x = \frac{-b}{2a}$ をもつ (同じ解が2つという意味)。
- 3) $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき, **実数解をもたない** (解なし)。

【例12】 次の2次方程式を解け。

$$(1) x^2 - 2x - 35 = 0 \quad (2) 49x^2 - 9 = 0 \quad (3) 4x^2 + 44x + 121 = 0 \quad (4) 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$(5) 10x^2 - 19x + 6 = 0 \quad (6) x^2 + 2x - 7 = 0$$

解答) (1) 因数分解して $(x - 7)(x + 5) = 0 \quad \therefore \underline{x = -5, 7}$

(2) 与式 = $(7x - 3)(7x + 3) = 0 \quad \therefore \underline{x = \pm \frac{3}{7}}$

(3) 因数分解して $(2x + 11)^2 = 0 \quad \therefore \underline{x = -\frac{11}{2}}$ (重解)

(4) $D = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$ だから, 解なし。

(5) 因数分解: $2 \searrow -3 \rightarrow -15$

$$\begin{array}{r} 5 \nearrow -2 \rightarrow -4 \\ \hline -19 \end{array} \quad \text{与式} = (2x - 3)(5x - 2) = 0 \quad \therefore \underline{x = \frac{3}{2}, \frac{2}{5}}$$

(6) 解の公式その2より, $x = -1 \pm \sqrt{1 + 7} = \underline{-1 \pm 2\sqrt{2}}$. ♥

【注意】 x の係数が2の倍数のとき, $ax^2 + 2bx + c = 0$ の解は (**解の公式その2**)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (2.12)$$

判別式が $D < 0$ のとき, 2次方程式(2.10)には, 実数解は無いのですが, 本当に解と呼べるものは無いのでしょうか? こんなことじっくり考えたことはありませんか? 解とはなんでしょうかね。実数でなくてもいいんじゃないですか。

【例13】 $a > 0$ のとき, $x^2 - a = 0$ は, $x^2 = a$, $\therefore x = \pm\sqrt{a}$ というぐあいに解を求めることができます。

$x^2 + 1 = 0$ も同じように解いてみましょう。 $x^2 = -1 \quad \therefore x = \pm\sqrt{-1}$ という感じで, 解らしきものが求まりますが, $\sqrt{-1}$ は実数じゃないですよ。2乗すると -1 になる数です。

あなたは、これを数と認めますか？ みんなが数と認めれば、**新しい数の誕生**です。 ♡

$\pm\sqrt{-1}$ を含む演算は、16世紀頃から形式的に使われてきたと言われていました。 $i = \sqrt{-1}$ を拡張された新しい数（**虚数単位**）とみなし、 i を含む数を**虚数** (imaginary number) と呼びました。現在、複素数と呼ばれる数を定義したのは、19世紀のガウス (C.F.Gauss, 1777-1855) だと言われています。今では、実数を含む数として完全に認められています。

【定義 1 1】 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ と2つの実数 a, b からなる次の数の集合

$$C = \{ a + bi \mid a, b \text{ は実数}, i = \sqrt{-1} \}$$

を**複素数** (Complex number) と呼ぶ。複素数 $a + bi$ の a は**実数部** (実部), b は**虚数部** (虚部) と呼ばれる。 $a = 0, b \neq 0$ のとき、 bi は**純虚数** と呼ばれる。また、複素数が0というのは、実部と虚部が共に0のときである。複素数の変数 (**複素変数**) は、実数の変数を x, y として、 $z = x + yi$ と表されることが多い。 ★

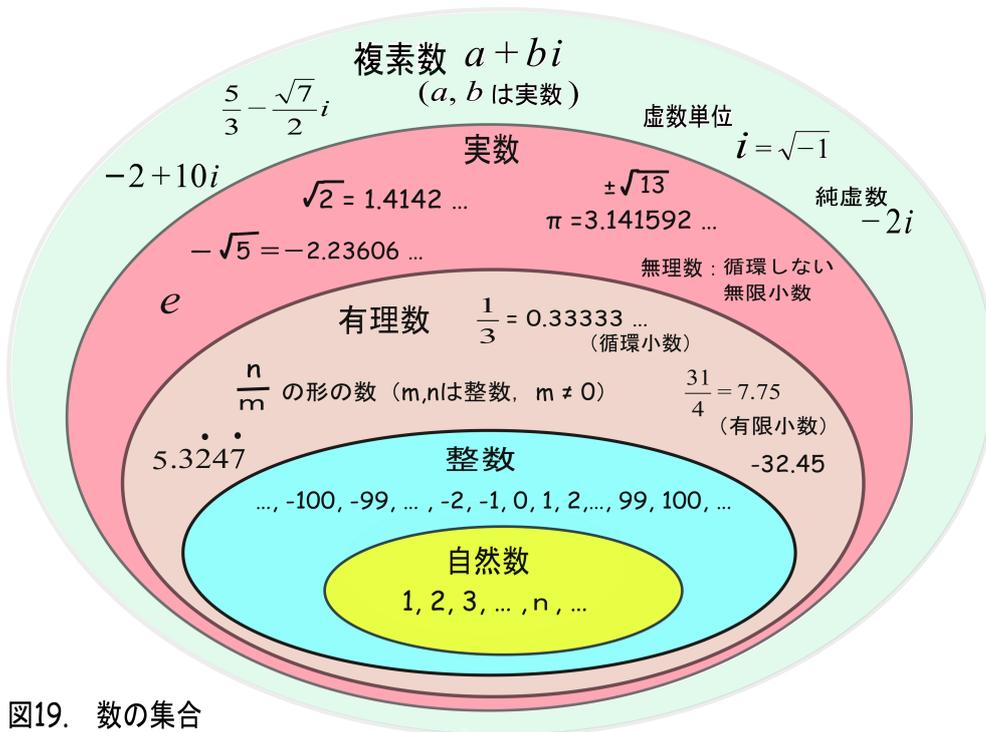


図19. 数の集合

数は、実数を含む複素数まで拡張されました。例 12,(4) の方程式 $2x^2 - 3x + 5 = 0$ の解は

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{31}\sqrt{-1}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}i$$

となります。複素数の範囲で2つの解をもちます。すなわち、**2次方程式 (2.10) は、複素数の範囲で2つの解をもつ**ということがわかりました。重解は、同じ解が2つと数えて下さい。すごく単純な結論でいいですね!!

【複素数の演算】 2つの複素数 $a + bi, c + di$ が与えられたとき、これらの四則演算を考えます。 i^2 は -1 で置き換えて下さい。

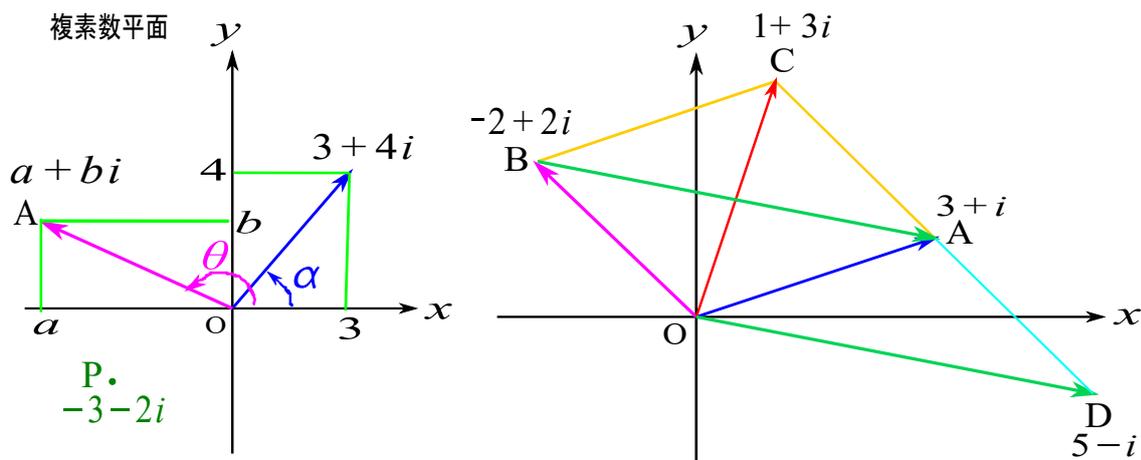
- (1) 和: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ 差: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
- (2) 積: $(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- (3) 商: $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$ (分母は実数にする)

複素数 $a+bi$ (a, b は実数) は, a と b が勝手に動く 2次元の数なので, 1つの複素数を表すのに平面を使います。これを **複素数平面** と呼びます。横軸は実数部を表す x 軸, 縦軸は虚数部を表す y 軸とします (下の図 20. 左を参照)。 $a+bi$ は, 平面上の 1点 (a, b) の所です。複素数は, 原点からのびる **ベクトル** として表すこともあります。

【定義 1 2】 複素数 $a+bi$ の **絶対値** $r = |a+bi|$ とは原点からの距離 $\sqrt{a^2+b^2}$ のことです。 $a+bi$ は次のように表すことができます:

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} i \right) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.13)$$

最後の式は, **極形式** と呼ばれ, θ は複素数 $a+bi$ の **偏角** (x 軸の正の部分からはかった角度) と呼ばれます。 $\cos \theta, \sin \theta$ は **三角関数** (高校の数学 II で学ぶ) で, 上の式が定義そのものです。すなわち, 1つの複素数は, その絶対値と偏角で表現可能です。 ★



$OA = r = \sqrt{a^2+b^2}$ は絶対値

図20 複素数平面, 和と差

【例 1 4】 (1) $z_1 = 3+i, z_2 = -2+2i$ のとき, z_1+z_2 と z_1-z_2 を計算し, 複素数平面上に図示せよ。

(2) $z_1 = 2+2i, z_2 = -1+\sqrt{3}i$ のとき, $z_1 z_2$ と $\frac{z_1}{z_2}$ を計算し, 複素数平面上に図示せよ。

解答 (1) z_1 をベクトル \vec{OA} で, z_2 をベクトル \vec{OB} で表す。 $z_1+z_2 = 1+3i$ (ベクトル \vec{OC} , 赤), $z_1-z_2 = 5-i$ (ベクトル \vec{OD} , 緑) となる。

注意してほしいのは, \vec{OA} と \vec{OB} がつくる平行四辺形の対角線ベクトル \vec{OC} が和を表し, もう 1つの対角線ベクトル $\vec{BA} = \vec{OD}$ が差を表します。平行移動したベクトルは同じものとみなされます。(図 20, 右参照)

(2) $z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), z_2 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ に注意せよ。

$$z_1 z_2 = (2+2i)(-1+\sqrt{3}i) = -2-2\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-1)i = 4\sqrt{2}(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+2i}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{2\{-1+\sqrt{3}+(-1-\sqrt{3})i\}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i = \sqrt{2}\{\cos(-75^\circ) + i \sin(-75^\circ)\} \quad \heartsuit$$

(中学生は, 三角関数表示はわからないよね。次の図 21 で, 積と商の位置関係を見て下さい)

【参考】 z_1 の絶対値が r_1 , 偏角が θ_1 で z_2 の絶対値が r_2 , 偏角が θ_2 のとき, 積 $z_1 z_2$ の絶対値は $r_1 r_2$, 偏角は $\theta_1 + \theta_2$ です。また, 商 $\frac{z_1}{z_2}$ の絶対値は $\frac{r_1}{r_2}$, 偏角は $\theta_1 - \theta_2$ です。

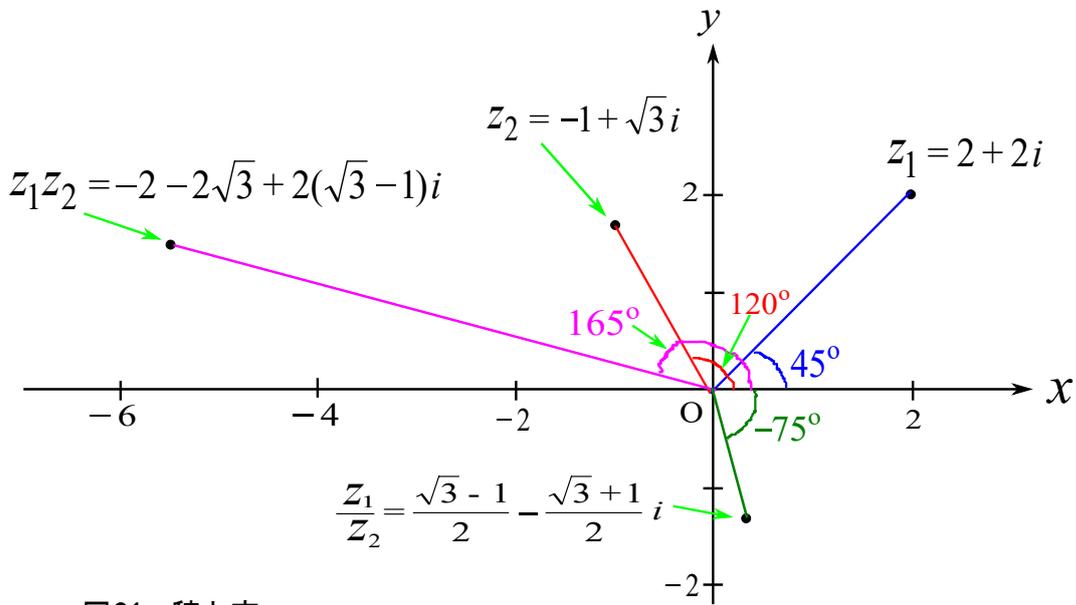


図21 積と商

【例15】 次の高次方程式の解を複素数の範囲で全て求め、それらを複素数平面上に図示せよ。

- (1) $x^3 - 1 = 0$ (2) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ (3) $x^4 + 1 = 0$
 (4) $x^5 - 1 = 0$ (5) $x^6 + 1 = 0$

解答) (1) 因数分解して $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ より, $x = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2) 因数分解して $(2x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$ より, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i, \pm 2$.

(3) $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = 0$ より,
 $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$. (下の図22参照, 円は半径1の単位円)

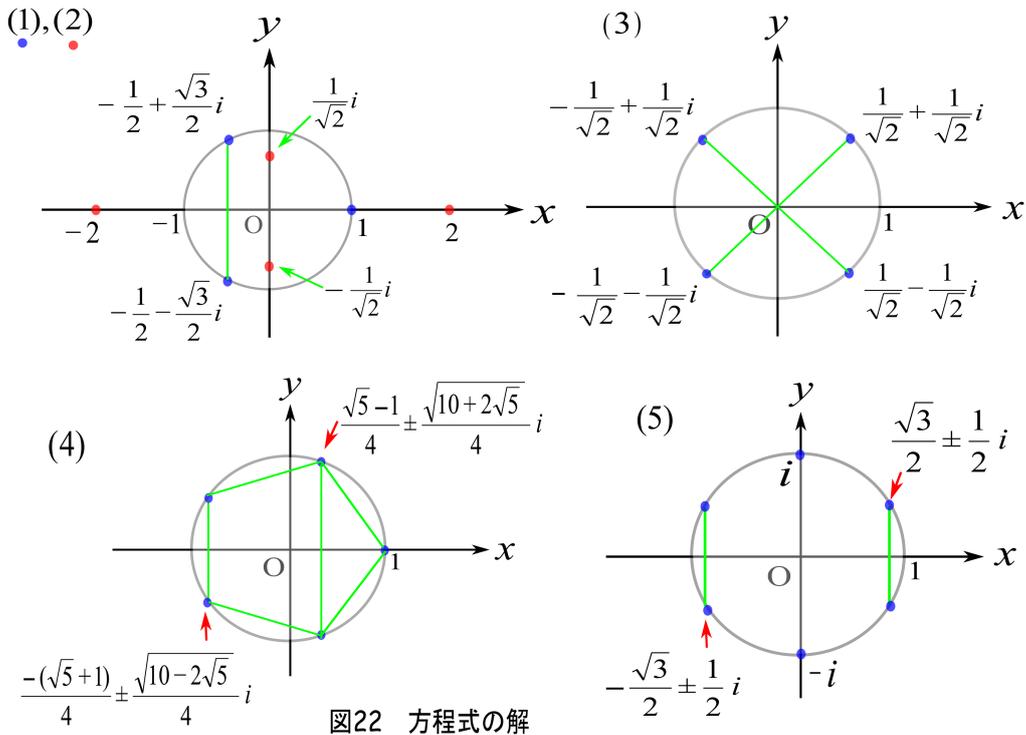


図22 方程式の解

(4) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$. $x = 1$ は解。4次式を x^2 で割ると、

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0. \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$t = x + \frac{1}{x}$ とおくと、 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ だから、 t の方程式

$$t^2 + t - 1 = 0 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

を得る。②を解いて $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となるので、次の2式を得る：

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \dots \quad \textcircled{3} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}. \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

③,④ は2次方程式なので、解の公式より次の4つの解を得る：

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}i, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}i.$$

(5) $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1 = 0$ だから、因数分解して $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0$. 第2項をさらに因数分解して $(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) = 0$ を得る。したがって、解は次の6つ：

$$x = \pm i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i. \quad (\text{図 22, (4),(5) を参照のこと}) \quad \heartsuit$$

方程式の解法をたくさん見たと思いますが、何を感じましたか？ 数が複素数の範囲まで拡張されると、方程式論は単純ですね。すなわち、 n 次方程式は n 個の解をもつようですね。これは、実は真実です。証明は、大学で複素関数論を学ぶとできます。証明したい方は、大学まで待って下さい。(待てない！という人もいるよね、そんな方は複素関数論を独学して)

【代数学の基本定理】実数係数をもつ n 次代数方程式：

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0) \quad (2.14)$$

は、複素数の範囲でちょうど n 個の解をもつ。ただし、重複解は重複度だけかぞえるものとする。

【注意】複素数係数をもつ n 次代数方程式と置き換えても、定理は成立します。この定理は、1798年ドイツのガウスによって証明されました。

けっこう難しそうな方程式も、因数分解ができると解が求まることもあります。そんな訳で因数分解は大切ですね。

3次方程式と4次方程式は、係数の加減乗除と根号（平方根や累乗根）を使った、解の公式があります（作れます）。複素数が入ってくるので使うのはけっこう難しいですよ。公式を使ってみたい方は私の著書 [7] (p.26-30) を見て下さい。

5次以上の代数方程式は、解の公式が作れないことが証明されています。

【アーベルとガロアの定理】5次以上の代数方程式は、係数の加減乗除と根号による解の公式を、一般にはもたない。

【参考】 アーベル：Niels Henrik Abel, 1802-1829, ノルウェイ。

ガロア：Évariste Galois, 1811-1832, フランス。

この定理はすごいですね。しかも、二人とも20代で結果を出しているようですね。血気盛んな若者の情熱を感じます。証明は、私もやったことがありませんが、難しいと聞いています。中高生の皆さんは、大学で証明に挑戦して見て下さい。

【演習問題 2. 4】

問 1. 次の連立 1 次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 0.3(x+1) + 0.2y = 0.8 \\ \frac{1}{2}x - y = \frac{7}{2} \end{cases} \quad (3) \frac{6x-y}{3} = \frac{2x+5y}{2} = -2x+1$$

問 2. 次式を因数分解せよ。

$$(1) 6x^2 - 7x - 20 \quad (2) 8x^2 - 26xy + 15y^2 \quad (3) x^3 - 3x + 2$$

$$(4) x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 \quad (5) x^5 - 3x^2 - 8x - 4 \quad (6) x^6 - 1$$

問 3. 次式を $x + yi$ の形で表せ。

$$(1) (6-i)(3+2i) \quad (2) \frac{5-i}{2+2i} + \frac{1+2i}{1-i} \quad (3) 1+i+i^2+\dots+i^{10}$$

$$(4) 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5}$$

問 4. 複素数 $z_1 = a + bi$ に対して、 $a - bi$ を z_1 の共役 (きょうやく) 複素数といい、 \bar{z}_1 で表す。
 $z_2 = c + di$ として、次式を証明せよ。

$$(1) |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1 \quad (2) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (3) \overline{z_1 z_2} = (\bar{z}_1)(\bar{z}_2) \quad (4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

問 5. (1) a は実数とする。方程式 $3x^3 - ax^2 + 3x - 1 = 0$ の 1 つの解が $\frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ のとき、 a の値と他の解を求めよ。

(2) $x^3 - 1 = 0$ の虚数解の 1 つを ω とするとき、次式の値を求めよ。

$$(a) 1 + \omega + \omega^2 \quad (b) 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^6 \quad (c) \frac{1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8}{1 + \omega + \omega^3 + \omega^5}$$

第 2 章 問題の答

【演習問題 2.1】

問 1. (1) 3 つの数を素因数分解する。

りんご; $56 = 2^3 \cdot 7$, なし; $40 = 2^3 \cdot 5$, かき; $128 = 2^7$ だから、最大公約数は 8 なので、8 人 で分ければよい。

(2) 3 つの数を 8 で割った商が答えなので、りんご, なし, かきのそれぞれの個数は、7 個, 5 個, 16 個 である。

問 2. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ より、3 つの数の最小公倍数は $(2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 144$. 午前 7 時に出発して、144 分後だから、答えは 9 時 24 分。

問 3. (1) 1 桁の素数は、2, 3, 5, 7 なので、問題の自然数 n は正の整数 a, b, c, d を用いて、 $n = 2^a 3^b 5^c 7^d$ と表される。 $a = b = c = d = 1$ のとき、 $n = 210$ なので、この数の 5 倍の 1050 が 4 桁で最小のものである。

(2) (1) の答えの 2 倍が 2100 で、2000 を超えてしまうので、2000 を超えない最大の自然数は $210 \cdot 3^2 = \underline{1890}$ である。

問 4. (1) 200 の素因数分解は $200 = 2^3 \cdot 5^2$. したがって、約数は、1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200 の 12 個である。これらの和 S は、 $S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)$ とかけるので、

$$S = 15 \cdot 31 = \underline{3 \cdot 5 \cdot 31}.$$

(2) 約数の 2 乗の和 T は次のようにかけるので素因数分解は;

$$T = (1 + 2^2 + 2^4 + 2^6)(1 + 5^2 + 5^4) = 85 \cdot 651 = \underline{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31}.$$

$$(3) U = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}\right) = \frac{15}{8} \cdot \frac{31}{25} = \frac{93}{40}.$$

$$(4) U = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6}\right) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4}\right) = \frac{85}{64} \cdot \frac{651}{625} = \frac{11067}{8000}.$$

(著者の独り言：(4)はいらないね。みんな同じ解法になってしまうので面白くない問題だね。)

【演習問題 2.2】

問 1. (1) $a < 0$ または $b < 0$. (2) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ (または $ab \neq 0$.)

(3) a, b のうち、少なくとも 1 つは無理数. (4) 2 つの素数の和は奇数である。

問 2. (1) (証明) 題意より a, b は次のように分解できる。

$a = dp_1 p_2 \cdots p_k, b = dq_1 q_2 \cdots q_l$. (p_i と q_j はたがいに素 ($i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, l$))
このとき、最小公倍数は、 $m = dp_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_l$ とかける。したがって、

$$dm = (dp_1 p_2 \cdots p_k)(dq_1 q_2 \cdots q_l) = ab. \quad \blacksquare$$

(2) (証明) 背理法を用いる。 $1 + 2\sqrt{2}$ は無理数でないとする、 p を有理数として、

$p = 1 + 2\sqrt{2}$ とかける。 $\sqrt{2} = \frac{p-1}{2}$ と変形できるが、この右辺は有理数なので、 $\sqrt{2}$ が無理数であるということに矛盾する。 \blacksquare

(3) (証明) 与えられた命題の対偶「 p と q がともに 0 でなければ、 $p + q\sqrt{2} \neq 0$ 」を証明する。

$p \neq 0, q = 0$ ならば、 $p + q\sqrt{2} = p$ だから $p + q\sqrt{2} \neq 0$.

$p = 0, q \neq 0$ ならば、 $p + q\sqrt{2} = q\sqrt{2}$. $q\sqrt{2}$ は 0 でない無理数なので、 $p + q\sqrt{2} \neq 0$.

$p \neq 0, q \neq 0$ ならば、 $p + q\sqrt{2}$ は 0 でない無理数なので、 $p + q\sqrt{2} \neq 0$. \blacksquare

問 3. (証明) 対偶を証明する。積 xy が奇数のとき、 x と y はともに奇数だから、

$$\text{ある整数 } k, l \text{ により, } x = 2k + 1, y = 2l + 1$$

と表すことができる。このとき、

$$x^2 + y^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1)$$

となり、 $x^2 + y^2$ は偶数であることがわかる。 \blacksquare

【演習問題 2.3】

問 1. (1), (2), (4) の 3 つ。(参考) $749 = 7 \cdot 107, 913 = 11 \cdot 83$

問 2. (1) $38 = 8 + 9 + 10 + 11, 42 = 13 + 14 + 15, 43 = 21 + 22, 76 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$
 $296 = 11 + 12 + 13 + \cdots + 25 + 26, 365 = 182 + 183, 378 = 93 + 94 + 95 + 96,$
 $566 = 140 + 141 + 142 + 143$

(2) 1 より大きい奇数は、整数 $k (\geq 1)$ を用いて $2k + 1$ と表される。 $2k + 1 = k + (k + 1)$.

(3) 3 で割り切れる正の偶数は、整数 $k (\geq 1)$ を用いて $2 \cdot 3 \cdot k$ と表される。

$$2 \cdot 3 \cdot k = (2k - 1) + 2k + (2k + 1) \text{ となる。}$$

(4) 8 で割って 4 余る正の整数は、整数 k を用いて、 $8k + 4$ と表される。

$$8k + 4 = (k - 3) + (k - 2) + (k - 1) + k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) \text{ となる。}$$

【演習問題 2.4】

問 1. (1) $x = 2, y = -\frac{8}{3}$ (2) $x = 3, y = -2$ (3) $x = \frac{17}{66}, y = \frac{1}{11}$

問 2. (1) $(2x - 5)(3x + 4)$ (2) $(4x - 3y)(2x - 5y)$ (3) $(x + 2)(x - 1)^2$ (4) $(x - 1)(x + 2)(x + 1)^2$
(5) $(x + 1)(x - 2)(x^3 + x^2 + 3x + 2)$ (6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

問 3. (1) $20 + 9i$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) i (4) $1 - i$

問 4. (1) と (3) のみ証明、他は略。

(1) の証明) $z_1 \bar{z}_1 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$ ■

(3) の証明) $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, $\therefore \bar{z}_1 \bar{z}_2 = ac - bd - (ad + bc)i \dots$ ①

$(\bar{z}_1)(\bar{z}_2) = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i \dots$ ②

①=② なので, 等式は証明された。 ■

問 5. (1) 与えられた方程式は $3x^2 - 2x + 1$ を因数にもつ。 a の値は $a = 5$ 。 他の解は

$x = 1, \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}$. (2) (a) 0, (b) 1, (c) $-\omega$.

参考図書

- [1] (中学校教科書) 新しい数学 1, 2, 3, 東京書籍 (2023)
- [2] 学研パーフェクトコース, 中学数学, Gakken (2020)
- [3] (高校教科書) 数学 I, II, III, A, B, 数研出版 (2014)
- [4] 岩瀬重雄 著: 高校数学・公式活用辞典, 旺文社 (2005)
- [5] A. ヴェイユ 著: 初学者のための整数論, 現代数学社 (1995)
- [6] 小山信也 著: 素数とゼータ関数, 共立出版 (2016)
- [7] 一昨日冗 著: 十進 BASIC で方程式を遊ぶ, 東京図書出版 (2014)

* 教科書というのは, すごくよくできてますよ。隅から隅まで読んで, わからないことがないような勉強をしていれば, どんな入試問題でも, 8割くらいはできますよ。数学は, ”1人で本が読める” というのが 1番大切ですね。習ってなくても読める本はどんどん読んじゃって下さい。

あとがき

数(すう)についてのあなたの疑問は解消されましたか? 数って, 宇宙のどこかにひそんでいて, あなたが見つけてくれることを待っているんでしょうね。本当に面白い存在ですね。

紀元前の中国で, 円周率 π の代わりに $\frac{355}{113}$ を使っていたという文献を読んだ記憶があります。

この円周率を近似する有理数はすごい数ですね:

$$\frac{355}{113} = 3.141592920 \dots$$

びっくりするほど π に近いですね。しかも, 1,3,5 の 3つの奇数でできているのが嬉しいね。

私達は普段の生活の中で, ときどきびっくりするような数に出会うこともありますね。次の数もおもしろいね:

$$\frac{10}{81} = 0.123456790 \dots$$

あなたもおもしろい数に出会ったら, 記録しておいて下さい。

私は, 車のナンバープレートの 4桁の数でいつも遊んでいます。四則演算とカッコをつかって 10 を作る遊びです。例えば (答えは一通りとは限らない),

4168 のとき, $-4 \times 1 + 6 + 8 = 10$ (数の並びを変えない場合, **パーフェクト**と呼ぶ)

6238 のとき, $2 \times (8 - 6 + 3) = 10$ (数の並びを変えた場合, **ポッシブル**と呼ぶ)

3809 のとき, ?? できないようですね, (できないとき, **インポッシブル**と呼ぶ)

9911 と 9653 はポッシブルですが, 式を作ってみて下さい。また, パーフェクトは全体の何%くらいあるんでしょうかね?

では, また, Take Care.....

(6月28日 '23 完, おとといのジョー)